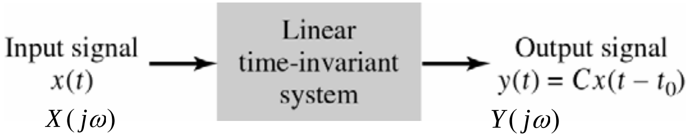
CAPITULO 8.-
APLICACONES A FILTROS Y ECUALIZADORES

8.1 Introducción.
8.2 Condiciones para la transmisión sin distorsión.
8.3 Filtros paso baja ideales.
8.4 Diseño de filtros.
8.5 Funciones de aproximación.
8.6 Transformaciones de frecuencia.
8.7 Filtros pasivos.
8.8 Filtros digitales.
8.9 Filtros digitales FIR.
8.10 Filtros digitales IIR.
8.11 Distorsión lineal.
8.12 Ecualización.

8.1 Introducción.

Diseño utilizando las transformadas de Laplace y z.
FILTROS: bloques funcionales para suprimir señales espurias.
ECUALIZADORES: bloques funcionales para compensar la distorsión de la señal transmitida.
Transmisión sin distorsión
Marco de referencia para filtros ideales.
Filtros anaógicos.
Filtros digitales.
Ecualización.

8.2 Condiciones para la transmisión sin distorsión.

$\delta(t)$  $h(t)$

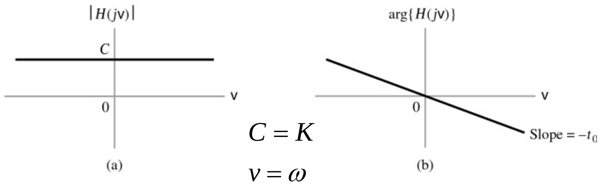
$X(j\omega)$ $\qquad$ $Y(j\omega)$

a) Continuo

$$y(t) = K\,x(t-t_0) \overset{F}{\longleftrightarrow} Y(j\omega) = K\,X(j\omega)e^{-j\omega t_0} \Rightarrow$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = Ke^{-j\omega t_0}$$

$$h(t) = K\delta(t-t_0)$$



$C = K$

$v = \omega$

$1.-\ \left|H(j\omega)\right| = K$

$2.-\ \arg\{H(j\omega)\} = -\omega t_0$

b) Discreto

8.2a

$$y[n] = Kx[n-n_0] \longleftrightarrow Y(e^{j\Omega}) = KX(e^{j\Omega})e^{-j\Omega t_0}$$

$$H(e^{j\Omega}) = Ke^{-j\Omega t_0}$$

$1.-\ \left|H(e^{j\Omega})\right| = K \qquad \Leftarrow$

$2.-\ \arg\{H(e^{j\Omega})\} = -\Omega t_0$

EJEMPLO 8.1

Supongamos que : $\ 2.-\ \arg\{H(j\omega)\} = -\omega t_0 + k\pi \quad , \quad \forall k \in Z$

¿ Cuál es el efecto de esta modificación ?

$$H(j\omega) = Ke^{-j\omega t_0 + jk\pi} = Ke^{-j\omega t_0}e^{jk\pi} = \pm Ke^{-j\omega t_0}$$

$$e^{jk\pi} = \begin{cases} -1, & k = impar \\ +1, & k = par \end{cases}$$

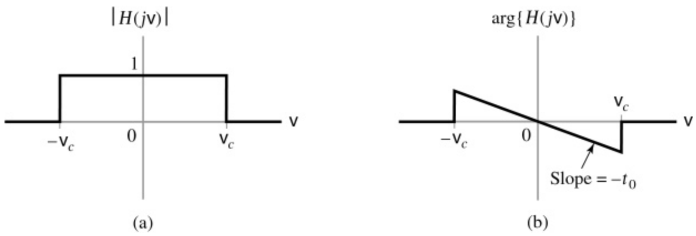
8.3 Filtros paso baja ideales.

FILTROS : pasobajas, pasoaltas, pasobanda y supresor de banda.
Respuesta en frecuencia de un filtro:

- Banda de paso
- Banda de rechazo
- Banda de transición/guarda

FILTRO PASOBAJAS ideal:

$$H(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0}, & |\omega| \le \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$



no causal

8.3a

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega(t-t_0)}d\omega$$

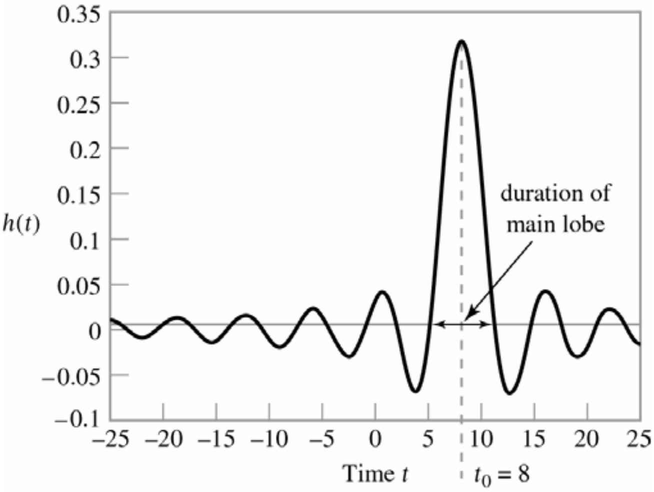
$$senc(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega t}d\omega = \frac{sen(\pi t)}{\pi t}$$

$$h(t) = \frac{\omega_c}{\pi}senc\left(\frac{\omega_c}{\pi}(t-t_0)\right)$$

Duración del lóbulo principal de la respuesta al impulso = $2\pi/\omega_c$

Filtro NO CAUSAL

Figure 8.4 (p. 618)
Time-shifted form of the sinc function, representing the impulse response of an ideal (but noncausal) low-pass filter for $\omega_c = 1$ and $t_0 = 8$.



Transmisión de un pulso rectangular a través de un filtro pasobajas ideal

8.3b

Comunicaciones digitales
1: transmitir un pulso rectangular
0: suprimir el pulso rectangular

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \le T_0/2 \\ 0, & |t| > T_0/2 \end{cases}$$

$$h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} senc\left(\frac{\omega_c}{\pi}(t-t_0)\right) = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{sen(\omega_c(t-t_0))}{\omega_c(t-t_0)}$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \frac{\omega_c}{\pi}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{sen(\omega_c(t-t_0-\tau))}{\omega_c(t-t_0-\tau)} d\tau$$

$$\lambda = \omega_c(t-t_0-\tau) \quad ; \quad d\lambda = -\omega_c d\tau$$

$$\tau = -T_0/2 \Rightarrow \lambda = a = \omega_c(t-t_0+T_0/2)$$

$$\tau = +T_0/2 \Rightarrow \lambda = b = \omega_c(t-t_0-T_0/2)$$

$$y(t) = \frac{1}{\pi}\int_b^a \frac{sen\lambda}{\lambda} d\lambda = \frac{1}{\pi}\left[\int_o^a \frac{sen\lambda}{\lambda} d\lambda - \int_0^b \frac{sen\lambda}{\lambda} d\lambda\right]$$

8.3c

$$y(t)=\frac{1}{\pi}\int_b^a \frac{sen\lambda}{\lambda}d\lambda=\frac{1}{\pi}\left[\int_o^a \frac{sen\lambda}{\lambda}d\lambda-\int_0^b \frac{sen\lambda}{\lambda}d\lambda\right]=\frac{1}{\pi}\left[Se(a)-Se(b)\right]$$

$$Integral\ seno \Rightarrow Se(u)=\int_0^u \frac{sen\lambda}{\lambda}d\lambda$$

La integral seno Se(u):

tiene simetría impar alrededor del origen u=0

tiene máximos y mínimos en múltiplos de π

tiende al valor límite de ± π para valores grandes de |u|

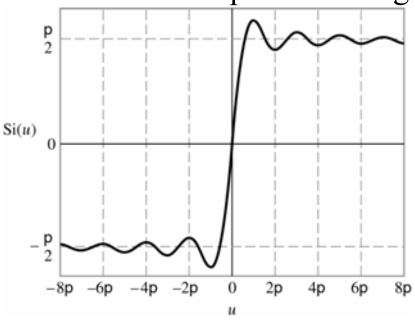
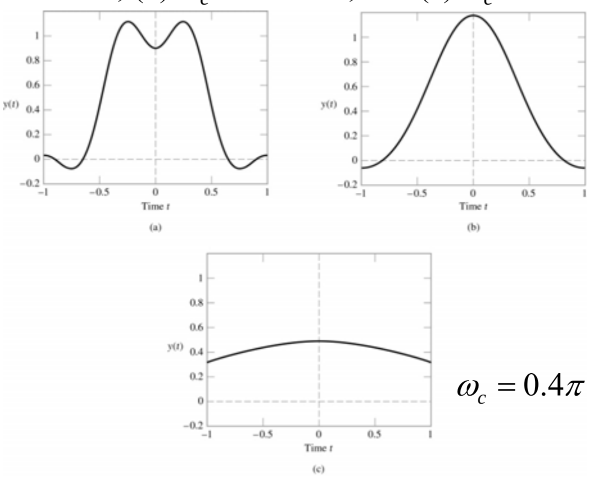


Figure 8.6 (p. 620)

Pulse response of an ideal low-pass filter for input pulse of duration T_0 = 1 s and varying filter cutoff frequency ω_c:
(a) $\omega_c = 4\pi$ rad/s; (b) $\omega_c = 2\pi$ rad/s; and (c) $\omega_c = 0.4\pi$ rad/s.

pulso

$\omega_c = 4\pi / T_0$



$\omega_c = 2\pi / T_0$

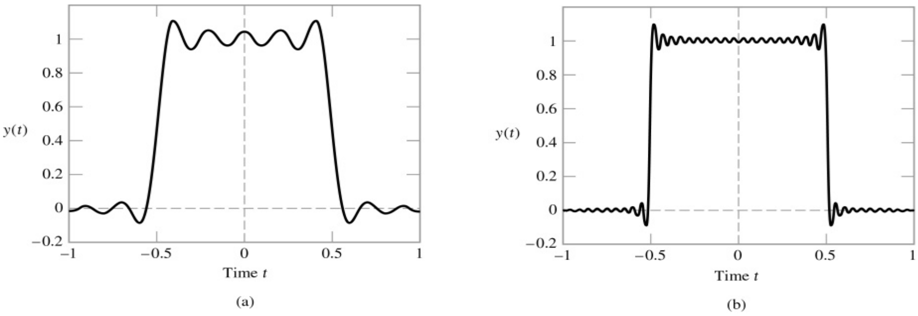
t_0=0

$\omega_c = 0.4\pi / T_0$

Relación inversa entre $\omega_c \leftrightarrow T_0$

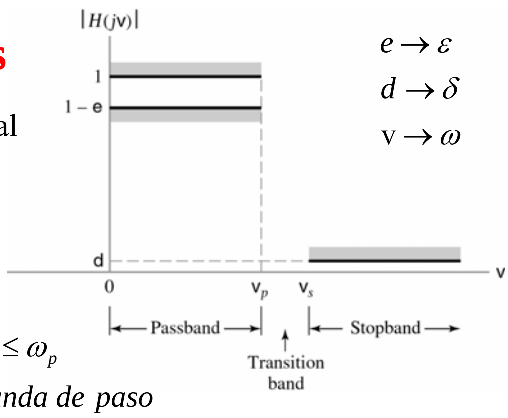
Figure 8.7 (p. 622)

The Gibbs phenomenon, exemplified by the pulse response of an ideal low-pass filter. The overshoot remains essentially the same despite a significant increase in the cutoff frequency ω_c: (a) $\omega_c T_0 = 10\pi$ rad and (b) $\omega c T_0 = 40\pi$ rad. The pulse duration T_0 is maintained constant at 1 s.



9 %

8.4 Diseño de filtros



$e \rightarrow \varepsilon$

$d \rightarrow \delta$

$v \rightarrow \omega$

Filtros en tiempo continuo real
distorsiones
desviaciones

Banda de paso

$1-\varepsilon \leq |H(j\omega)| \leq 1 \quad para\ 0 \leq |\omega| \leq \omega_p$

ω_p : *frecuencia de corte de la banda de paso*

ε : *parámetro de tolerancia de la banda de paso*

Banda de rechazo

$|H(j\omega)| \leq \delta \quad para\ |\omega| \geq \omega_s$

ω_s : *frecuencia de corte de la banda de rechazo (eliminación)*

δ : *parámetro de tolerancia de la banda de rechazo*

Banda de transición $\Rightarrow$ *ancho de banda* $= \omega_s - \omega_p$

8.4a

DISEÑO DEL FILTRO (no único)
Partiendo de un conjunto de especificaciones que describe las propiedades deseadas del filtro selector de frecuencias :

1.- ***Aproximación*** de una respuesta en frecuencia preestablecida por medio de una función de transferencia racional que presentan un sistema que es tanto causal como estable.
2.- ***Realización*** de la función de transferencia aproximada mediante un sistema físico.

Planteamientos para el diseño de filtros analógicos y digitales :

1.- *Método analógico*
2.- *Método analógico-digita*
3.- *Método digital directo*

8.5 Funciones de aproximación.

1 Conjunto de especificaciones específicas
2 Estructura de filtro específica
3 Elección de la función de transferencia (desempeño del filtro)
"No hay una solución única"

La aproximación es un problema de optimización
Criterios de optimización :

1.- *Respuesta en magnitud máximamente plana*
Filtro pasobajas analógico de orden N

$$\frac{\partial^{2N-1}}{\partial\omega^{2N-1}}|H(j\omega)| = 0 \quad en\ \omega = 0 \qquad \text{(Filtros Butterworth)}$$

2.- *Respuesta en magnitud de rizo uniforme*
Filtro pasobajas analógico

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\delta^2 F^2(\omega)} \qquad \text{(Filtros Chebyshev)}$$

NO

8.5a

La respuesta en magnitud |H(jω)| se dice que será de **rizo uniforme en la banda de paso** si $F^2(\omega)$ oscila entre máximos y mínimos de igual amplitud sobre la banda de paso completa (Chebyshev I). Distinguiremos dos casos según el orden del filtro sea N par o impar

Ejemplos : **Caso a** : $N = 3,\ y\ \omega_c = 1 \quad ; \quad 0 < \omega_b < \omega_a < 1$

$i)\quad F(\omega) = 0,\ si\ \omega = 0, \pm\omega_a$

$ii)\quad F^2(\omega) = 1,\ si\ \omega = \pm\omega_b, \pm 1$

$$iii)\ \frac{\partial}{\partial\omega} F^2(\omega) = 0,\ si\ \omega = 0, \pm\omega_b, \pm\omega_a, \pm 1$$

Caso b : $N = 4,\ y\ \omega_c = 1 \quad ; \quad 0 < \omega_{a1} < \omega_b < \omega_{a2} < 1$

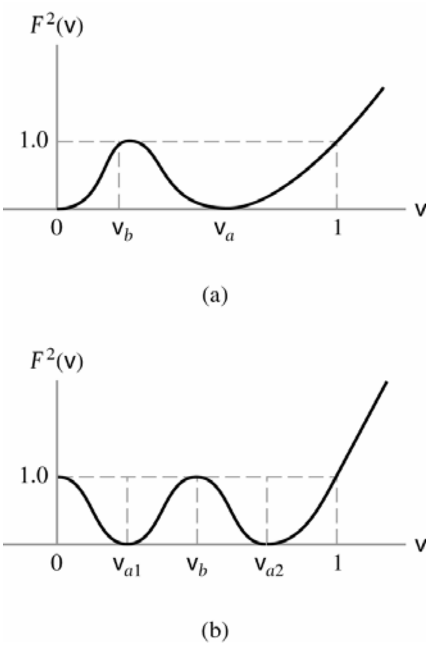
$i)\quad F(\omega) = 0,\ si\ \omega = \pm\omega_{a1}, \pm\omega_{a2}$

$ii)\quad F^2(\omega) = 1,\ si\ \omega = 0, \pm\omega_b, \pm 1$

$$iii)\ \frac{\partial}{\partial\omega} F^2(\omega) = 0,\ si\ \omega = 0, \pm\omega_{a1}, \pm\omega_b, \pm\omega_{a2}, \pm 1$$

NO

Figure 8.9 (p. 625)
Two different forms of function $F^2(\omega)$:
(a) $N = 3$.
(b) N= 4.



Filtros Butterworth

8.5b

Una función Butterworth de orden N se define : $|H(j\omega)|^2 = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}$

|H(jω)| función par de ω

$\omega_c =$ *frecuencia de corte del filtro*

$a)\quad 1-\varepsilon \le |H(j\omega)| \le 1 \quad \forall\omega \quad 0 \le |\omega| \le \omega_p$

$*\ \omega = \omega_p \Rightarrow |H(j\omega)| = 1-\varepsilon$

$$(1-\varepsilon)^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega_p}{\omega_c}\right)^{2N}} \quad \Rightarrow \quad \omega_p = \omega_c\left(\frac{1}{(1-\varepsilon)^2}-1\right)^{\frac{1}{2N}} \quad [1]$$

$b)\quad |H(j\omega)| \le \delta \quad \forall\omega \quad |\omega| \ge \omega_s$

$*\ \omega = \omega_s \Rightarrow |H(j\omega)| = \delta$

$$\delta^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega_s}{\omega_c}\right)^{2N}} \quad \Rightarrow \quad \omega_s = \omega_c\left(\frac{1}{\delta^2}-1\right)^{\frac{1}{2N}} \quad [2]$$

Filtros Butterworth

8.5c

Cálculo de N

$R_p = -20\log(1-\varepsilon) \Rightarrow$ *rizado máximo (tolerancia) de la banda de paso (en dB)*

$$(1-\varepsilon) = 10^{-\frac{R_p}{20}} \Rightarrow (1-\varepsilon)^2 = 10^{-0.1R_p}$$

$R_s = -20\log(\delta) \Rightarrow$ *rizado máximo (tolerancia) de la banda de rechazo (en dB)*

$$\delta = 10^{-\frac{R_s}{20}} \Rightarrow \delta^2 = 10^{-0.1R_s}$$

$$\omega_A = \frac{\omega_s}{\omega_p} = \left[\frac{\frac{1}{\delta^2}-1}{\frac{1}{(1-\varepsilon)^2}-1}\right]^{\frac{1}{2N}} = \left[\frac{10^{0.1R_s}-1}{10^{0.1R_p}-1}\right]^{\frac{1}{2N}}$$

$$N = \frac{\log\left[\frac{10^{0.1R_s}-1}{10^{0.1R_p}-1}\right]}{2\log\frac{\omega_s}{\omega_p}} = \frac{\log\left[\frac{10^{0.1R_s}-1}{10^{0.1R_p}-1}\right]^{1/2}}{\log\frac{\omega_s}{\omega_p}}$$

Filtros Butterworth

8.5d

Cálculo de ω_c

$$[2] \Rightarrow \omega_s = \omega_c \left(\frac{1}{\delta^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2N}} = \omega_c \left(10^{0.1R_s} - 1 \right)^{\frac{1}{2N}} \quad \Rightarrow \quad \omega_c = \frac{\omega_s}{\left(10^{0.1R_s} - 1 \right)^{\frac{1}{2N}}}$$

$$|H(j\omega)| dB = 20 \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^{2N} \right]^{-1/2} = -10 \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^{2N} \right]$$

$$Pendiente\ de\ |H(j\omega)| dB\ en\ \omega = \omega_c \quad ; \quad \frac{d|H(j\omega)|dB}{d\omega} |_{\omega=\omega_c} = -20N$$

$$Pendiente\ de\ |H(j\omega)| dB\ en\ \omega = 0 \quad ; \quad \frac{d|H(j\omega)|dB}{d\omega} |_{\omega=0} = 0$$

Filtros Butterworth

8.5e

Las primeras 2N-1 derivadas de |H(jω)| en el origen son cero
La función de Butterworth es máximamente plana en ω=0

$¿H(s)?$

$$H(s)H(-s)|_{s=j\omega} = |H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^{2N}} \quad ; \quad H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\omega_c} \right)^{2N}}$$

$$polos: p_k = j\omega_c (-1)^{\frac{1}{2N}} = e^{j\pi/2} \omega_c \left(e^{j\pi(2k-1)} \right)^{\frac{1}{2N}} = \omega_c e^{\frac{j\pi(2k+N-1)}{2N}} \; ; k = 0,1,\ldots,2N-1$$

$$\theta_k = \frac{(2k+N-1)\pi}{2N} \quad \Rightarrow \quad p_k = \omega_c e^{j\theta_k} \; ; \quad k = 0,1,\ldots,2N-1$$

$$p_k = \sigma_k + j\omega_k = \omega_c \cos\theta_k + j\, \omega_c sen\theta_k$$

Filtros Butterworth 8.5f

$$p_k = \omega_c \cos\theta_k + j\omega_c sen\theta_k \quad ; \quad \theta_k = \frac{(2k+N-1)\pi}{2N} \quad ; \quad k = 0,1,\ldots,2N-1$$

EJEMPLOS :

$N = 3$

$$\theta_0 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \quad ; \quad \theta_1 = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} \quad ; \quad \theta_2 = \frac{6\pi}{6} = \pi$$

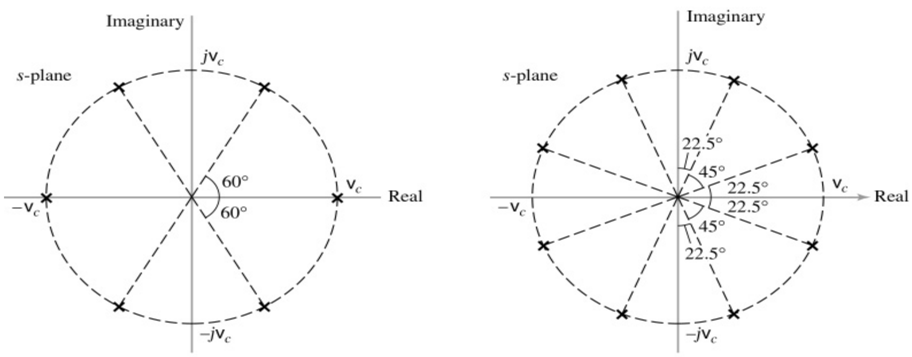
$$\theta_3 = \frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3} \quad ; \quad \theta_4 = \frac{10\pi}{6} = \frac{5\pi}{3} \quad ; \quad \theta_5 = \frac{12\pi}{6} = 2\pi$$

$N = 4$

$$\theta_0 = \frac{3\pi}{8} \quad ; \quad \theta_1 = \frac{5\pi}{8} \quad ; \quad \theta_2 = \frac{7\pi}{8} \quad ; \quad \theta_3 = \frac{9\pi}{8}$$

$$\theta_4 = \frac{11\pi}{8} \quad ; \quad \theta_5 = \frac{13\pi}{8} \quad ; \quad \theta_6 = \frac{15\pi}{8} \quad ; \quad \theta_7 = \frac{17\pi}{8} = \frac{\pi}{8}$$

Figure 8.11 (p. 628)
Distribution of poles of $H(s)H(-s)$ in the s-plane for two different filter orders: (a) K =N= 3 and (b) K =N= 4, for which the total number of poles is 6 and 8, respectively.



N polos H(s) (a) N polos H(-s)

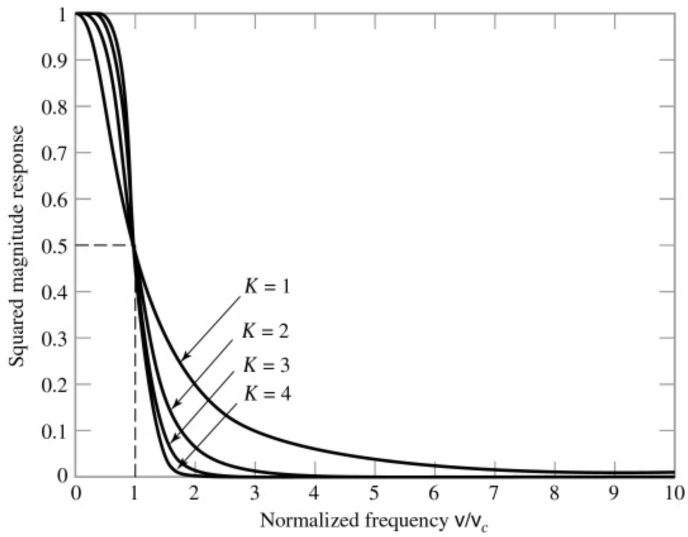
2N polos

N polos H(s) (b) N polos H(-s)

2N polos

Figure 8.10 (p. 627)

Magnitude response of Butterworth filter for varying orders.



Ejemplo 8.3a

Determine la función de transferencia de un filtro de Butterworth de tipo pasobajas con orden N=3. Supongamos que la frecuencia de corte de 3dB es $\omega_c=1$.

Solución : Para N=3, los 2N polos de H(s)H(-s) se localizan en un círculo de radio unitario con espaciamiento angular de 60º. Asignando los polos del semiplano izquierdo H(s), tenemos

$$p_k = \omega_c \cos\theta_k + j\omega_c sen\theta_k \quad ; \quad \theta_k = \frac{(2k+N-1)\pi}{2N} \quad ; \quad k = 0,1,\dots,2N-1$$

$$N = 3 \quad ; \quad \omega_c = 1 \quad ; \quad 3 \; polos \; de \; H(s): semiplano \; izquierdo \; del \; plano \; s$$

$$\theta_1 = \frac{2\pi}{3} \quad ; \quad \theta_2 = \pi \quad ; \quad \theta_3 = \frac{4\pi}{3}$$

$$p_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + jsen\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$p_2 = \cos\pi + jsen\pi = -1$$

$$p_3 = \cos\frac{2\pi}{3} + jsen\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ejemplo 8.3b

$$p_1 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \qquad p_2 = -1 \quad ; \qquad p_3 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)\left(s+\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(s+\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

$$H(s) = \frac{1}{s^3+2s^2+2s+1} \Leftarrow H(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^3 + 2\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2 + 2\left(\frac{s}{\omega_c}\right) + 1}$$

8.5g

Resumen de filtros de Butterworth: H(s)=1/Q(S)

Orde N del filtro	Polinomio Q(s)
1	$s+1$
2	$s^2+\sqrt{2}s+1$
3	s^3+2s^2+2s+1
4	$s^4+2.6131s^3+3.4142s^2+2.6131s+1$
5	$s^5+3.2361s^4+5.2361s^3+5.2361s^2+3.2361s+1$

8.5h

Filtros Chebyshev

Respuesta en magnitud de rizo uniforme (0.5 dB) en la banda de paso.
Funciones de aproximación de Chebyshev.
Ancho de banda de transición reducido.
Los polos yacen sobre una elipse en el plano s de una manera estrechamente relacionada a la del filtro de Butterworth correspondiente.
Comportamiento monotónico en la banda de rechazo.

Filtros Chebyshev inverso

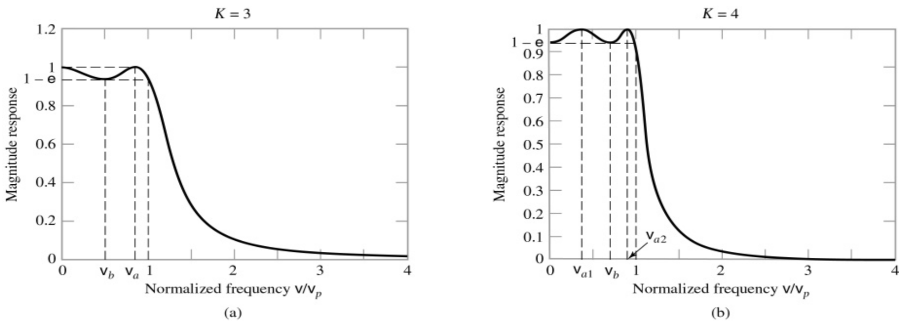
Comportamiento monotónico en la banda de paso.
Respuesta en magnitud de rizo uniforme en la banda de rechazo.
Tiene ceros sobre el eje jω del plano s.

Filtro elíptico

Respuesta en magnitud de rizo uniforme en la banda de paso y de rechazo. Banda de transición estrecha.

NO

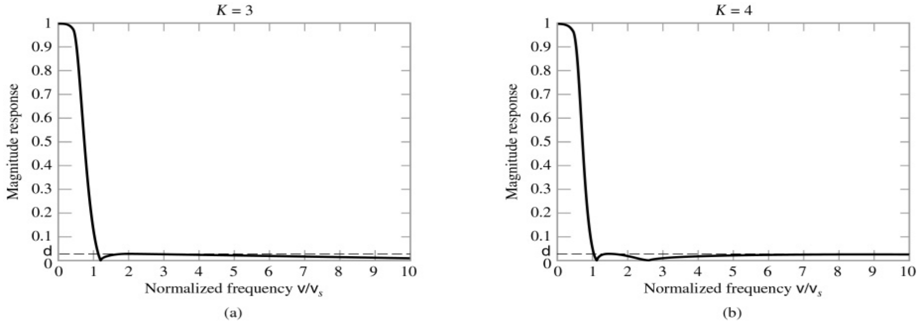
Figure 8.12 (p. 629)
Magnitude response of Chebyshev filter for order (a) $K = 3$ and (b) $K = 4$ and passband ripple = 0.5 dB. The frequencies ω_b and ω_a in case (a) and the frequencies ω_{a1} and ω_b, and ω_{a2} in case (b) are defined in accordance with the optimality criteria for equiripple amplitude response.



NO

Figure 8.13 (p. 630)

Magnitude response of inverse Chebyshev filter for order (a) $K = 3$ and
(b) $K = 4$ and stopband ripple = 30 dB.



8.6 Transformaciones de frecuencia.

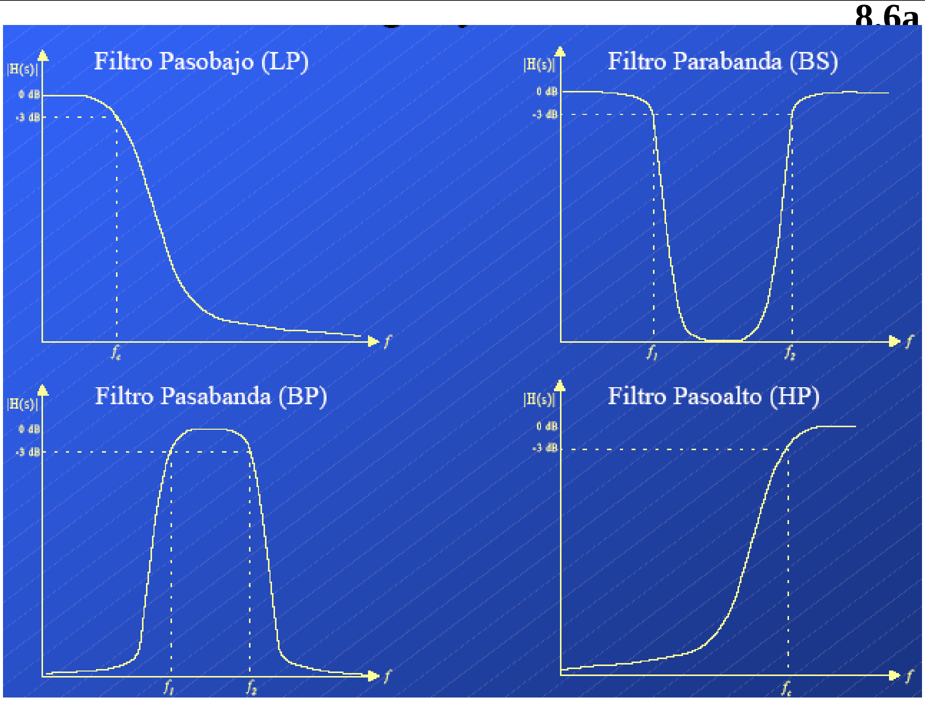
No afectan a las tolerancias dentro de las cuales se aproxima la característica de interés ideal

Transformación pasobajas a pasoaltas

$$s \rightarrow \frac{\omega_c}{s} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s-d_j} \rightarrow \frac{1}{\frac{\omega_c}{s}-d_j} = \frac{s}{\omega_c - d_j s} = \frac{-\,{}^{s}/_{d_j}}{s-{}^{\omega_c}/_{d_j}} = \frac{-\,{}^{s}/_{d_j}}{s-D_j}$$

$$\frac{1}{s-d_j} \rightarrow \frac{-\,{}^{s}/_{d_j}}{s-D_j} \quad ; \quad D_j = {}^{\omega_c}/_{d_j}$$

8.6a



Ejemplo 8.4

La ecuación $$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

define la función de transferencia de un filtro de Butterworth pasobajas de orden 3 y frecuencia de corte unitaria. Determine la función de transferencia del filtro pasoaltas correspondiente con frecuencia de corte unitaria.

Solución:

$$H_{pb}(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)} \xrightarrow{s \to \frac{\omega_c}{s} = \frac{1}{s}} H_{pa}(s) = \frac{1}{\left(\frac{1}{s}+1\right)\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}+1\right)}$$

$$H_{pa}(s) = \frac{s^3}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

8.6b

Transformación pasobajas a pasobanda

Propiedades de un filtro pasobanda:
1.- $H(j\omega)=0$ tanto en $\omega=0$ como en $\omega=\infty$
2.- $|H(j\omega)|\approx 1$ para una banda de frecuencias centrada en ω_0
(frecuencia de banda media del filtro)
Función de transferencia con :
- Ceros en $s=0$ y $s=\infty$
- Polos cerca de $s=\pm j\omega_0$ sobre el eje $j\omega$ en el plano s
B= ancho de banda

$$s \to \frac{s^2+\omega_0^2}{Bs} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s-d_j} \to \frac{Bs}{s^2 - Bd_j s + \omega_0^2} = \frac{Bs}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

$$donde \quad p_1, p_2 = \frac{1}{2}\left(Bd_j \pm \sqrt{B^2 d_j^2 - 4\omega_0^2}\right)$$

Ejercicio 8.6

Considere un filtro pasobajas cuya función de transferencia es

$$H(s) = \frac{1}{s+a}$$

Determine la función de transferencia del filtro pasobanda correspondiente con frecuencia de media banda $\omega_0=1$ y ancho de banda B=0.1

$$H(s) = \frac{1}{s+a} \xrightarrow{\frac{s^2+1}{0.1s}} H(s) = \frac{0.1s}{s^2+0.1s+1}$$

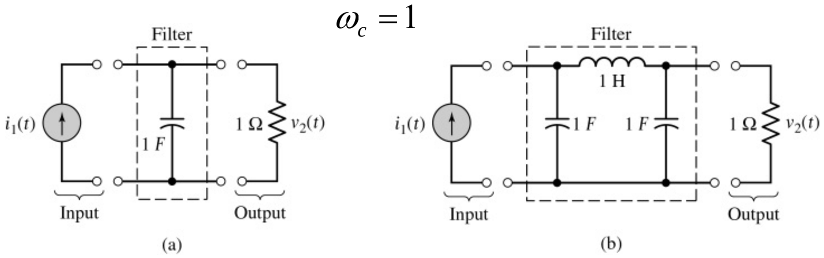
8.7 Filtros pasivos.

Elementos reactivos: inductores y capacitores
Elementos resistivos : resistencia de fuente y/o de carga

Síntesis de red: a partir de H(s) determinar los elementos del filtro

Figure 8.14 (p. 633)
Low-pass Butterworth filters driven from ideal current source:
(a) order $K = 1$ and (b) order $K = 3$.

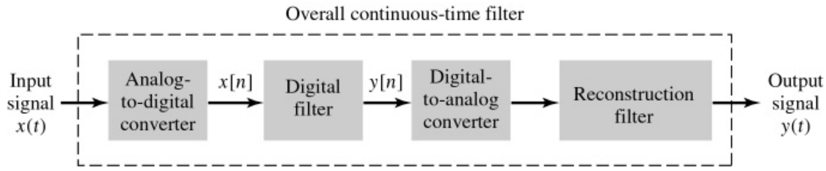
$\omega_c = 1$



8.8 Filtros digitales.

- El término *filtro digital* lo entenderemos como cualquier procesamiento realizado en una señal de entrada digital.
- Un filtro digital es la implementación en hardware o software de una ecuación diferencia.
- Ventajas de los filtros digitales
  - Alta precisión (limitada por los errores de redondeo en la aritmética empleada)
  - Fácil modificación de las características del filtro
  - Muy bajo coste (y bajando)
  - Alta inmunidad al ruido
- Por estas razones, los filtros digitales están reemplazando rápidamente a los filtros analógicos.

Filtros digitales.



Diseño de filtros digitales:

1.- "Teórico" Utiliza un modelo analógico de precisión infinita para las muestras de datos de entrada y todos los cálculos interno. Amplitud continua. (Filtros en tiempo discreto)

2.- "Práctico" Los datos de entrada y los calculos internos están cuantizados hasta una precisión finita. Errores de redondeo. Su desempeño se desvía del de un filtro en tiempo discreto a partir del cual se obtuvo. (Filtros digitales)

8.8a

Clasificación de los Filtros Digitales

I.- Filtros de Respuesta al Impulso Finita :FIR

(**F**inite **I**mpulse **R**esponse)

MA (Moving Average) Media en movimiento

II.- Filtros de Respuesta al Impulso Infinita : IIR

(Infinite Impulse Response)

AR (Autoregresivo)

ARMA (Autoregresivo y Moving Average)

8.8b

I.- Filtros de Respuesta al Impulso Finita : FIR MA(M), Moving Average

•Un filtro FIR de orden *M* se describe por la siguiente ecuación diferencia $y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + ... + b_M x[n-M]$

•La función de transferencia es un polinomio en z-1

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + ... + b_M z^{-M}$$

•La función de Transferencia tiene un denominador constante y sólo tiene ceros.

•La secuencia $\{b_k\}$ son los coeficientes del filtro.

•La respuesta es por tanto una suma ponderada de valores pasados y presentes de la entrada. De ahí que se denomine Media en Movimiento (Moving Average)

•Tienen memoria finita y en vista de ello ningún transitorio de inicio es de duración limitada

8.8c

•Siempre son estables en sentido BIBO

•Pueden realizar una respuesta en magnitud deseada con exactamente respuesta en fase lineal (sin distorsión de fase)

•No hay recursión, es decir, la salida depende sólo de la entrada y no de valores pasados de la salida.

•La respuesta es de duración finita ya que si la entrada se mantiene en cero durante *M* periodos consecutivos, la salida será también cero

8.8d

I.- Filtros de Respuesta al Impulso Infinita : IIR

a) AR (Autoregresivo)

b) ARMA (Autoregresivo y Moving Average)

- Ecuaciones en diferencias lineales de coeficientes constantes de una naturaleza recursiva.
- La función de transferencia es una función racional en z^{-1}
- Longitud de filtro más corta, para una respuesta en frecuencia dada
- Distorsión de fase.

8.8e

I.- Filtros de Respuesta al Impulso Infinita : IIR
a) AR (N), Autoregresivo

•La ecuación diferencia que describe un filtro AR es

$$y[n]+a_1y[n-1]+a_2y[n-2]+...+a_Ny[n-N]=x[n]$$

, lo que da lugar a una función de transferencia

$$H(z)=\frac{1}{1+a_1z^{-1}+...+a_Nz^{-N}}$$

•La función de transferencia contiene solo polos.
•El filtro es recursivo ya que la salida depende no solo de la entrada actual sino además de valores pasados de la salida (Filtros con realimentación).
•El término autoregresivo tiene un sentido estadístico en que la salida *y[n]* tiene una regresión hacia sus valores pasados.
•La respuesta al impulso es normalmente de duración infinita, de ahí su nombre.

8.8f

I.- Filtros de Respuesta al Impulso Infinita : IIR

b) ARMA(N,M), Autoregresivo y Moving Average

- Es el filtro más general y es una combinación de los filtros MA y AR descritos anteriormente. La ecuación diferencia que descibe un filtro ARMA de orden N es

$$y[n]+a_1 y[n-1]+\ldots+a_N y[n-N]=b_0 x[n]+b_1 x[n-1]+\ldots+b_M x[n-M]$$

Y la función de transferencia
$$H(z)=\frac{b_0+b_1 z^{-1}+\ldots+b_M z^{-M}}{1+a_1 z^{-1}+\ldots+a_N z^{-N}}$$

- Un filtro de este tipo se denota por ARMA(N,M), es decir es Autoregresivo de orden N y Media en Movimiento de orden M.
- Su respuesta a impulso es también de duración infinita y por tanto es un filtro del tipo IIR.

8.8e

Clasificación de los Filtros Digitales

Ecuación Diferencia	*Tipo de Filtro*
$y[n]=\sum_m B_m x[n-m]$	*FIR(Finite Impulse Response), No Recursivo, Moving Average (MA) orden M, Todo ceros*
$\sum_k A_k y[n-k]=x[n]$	*IIR (Infinite Impulse Response), Recursivo, Autoregresivo(AR) orden N, Todo polos*
$\sum_k A_k y[n-k]=\sum_m B_m x[n-m]$	*IIR Recursivo, ARMA(N,M), Polos y Ceros*

8.10 Filtros digitales IIR.

Filtros IIR-Método I

- Una vez estudiadas las técnicas de diseño de filtros analógicos retomamos el objetivo inicial de este tema, que era transformar las funciones de Transferencia de los filtros del plano *s* al plano *z*. En esto consistía el Método I de diseño de filtros digitales.
- Hay varios métodos para transformar una función de *s* en otra función de *z*. Estamos interesados en transformaciones que hagan que la función en *z* sea también racional. Esto hace que las transformaciones que vamos a ver son sólo aproximaciones.
- Una transformación $s \rightarrow z$ debe cumplir dos condiciones fundamentales,
  - Estabilidad: la mitad izquierda del plano *s* debe transformarse dentro del círculo unidad en el plano *z*.
  - A cada frecuencia analógica dentro del intervalo $(-\infty, \infty)$ le debe corresponder una única frecuencia digital en el intervalo $(-f_s/2, f_s/2)$. Esto evita el problema del "aliasing".

NO

8.10a

- Los métodos que vamos a ver son :
  - Igualar las respuestas temporales como un impuso, un escalón, una rampa, etc. (*Transformación Invariante a la Respuesta*).
  - Igualar términos en una $H(s)$ factorizada (*Transformada Z Pareada*).
  - Conversión de ecuaciones diferenciales a ecuaciones diferencia utilizando operadores diferencia.
  - Integración numérica de ecuaciones diferenciales usando algoritmos de integración.
  - Aproximaciones racionales a $z \rightarrow exp(st_s)$ o $s \rightarrow (1/t_s)ln(z)$.

NO **8.10b**

- Transformación Invariante a la Respuesta (TIR)
  - Se elige una entrada $x(t)$ (impulso, escalón o rampa).
  - Determinar la respuesta $y(t)$ como la $L^{-1}\{H(s)X(s)\}$.
  - Muestrear $y(t)$ a intervalos t_s y obtener $y[n]$ y su Transformada Z $Y(z)$.
  - Muestrear $x(t)$ para obtener $x[n]$ y $X(z)$.
  - Evaluar $H(z)$ como $Y(z)/X(z)$.

  Este tipo de transformación está limitada por la frecuencia de muestreo f_s que restringe su aplicación a aquellos sistemas cuya respuesta está limitada por $\pm\frac{1}{2}f_s$ por problemas de aliasing ya que la función de transferencia transformada es una función periódica de periodo $1/t_s$. Esto hace que este tipo de transformación es más apropiada para filtros pasobajos de Butterworth y Chebyshev I que para filtros de Chebyshev II.

  Una caso particular de este tipo es la *Transformación Invariante a Impulso*. Supongamos que tenemos $H(s)$ en forma de fracciones parciales. Para cada término podemos determinar su equivalente en z a través de su respuesta a impulso. Los términos y sus equivalencias en z están tabulados en la tabla adjunta.

NO **8.10c**

Transformaciones Invariantes al Impulso

Término	*H(s)*	*H(z)* $a=exp(-pt_s)$
Unico	$\frac{A}{(s+p)}$	$\frac{Az}{(z-a)}$
Complejo Conjugado	$\frac{A\exp(j\Omega)}{(s+p+jq)}+\frac{A\exp(-j\Omega)}{(s+p-jq)}$	$\frac{2z^2A\cos(\Omega)-2Aaz\cos(\Omega+qt_s)}{z^2-2az\cos(qt_s)+a^2}$
Repetido	$\frac{A}{(s+p)^M}$	$\frac{A}{(M-1)!}t_s^{(M-1)}\left(-z\frac{d}{dz}\left(-z\frac{d}{dz}\cdots-z\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{z-a}\right]\right)\right)$
Repetido	$\frac{A}{(s+p)^2}$	$At_s^2\frac{az}{(z-a)^2}$
Repetido	$\frac{A}{(s+p)^3}$	$\frac{1}{2}At_s^3\frac{za(z+a)}{(z-a)^3}$
Modificado	$\frac{A}{(s+p)}$	$\frac{Az}{(z-a)}-\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}\frac{z+a}{z-a}$
Modificado	$\frac{A\exp(j\Omega)}{(s+p+jq)}+\frac{A\exp(-j\Omega)}{(s+p-jq)}$	$\frac{2z^2A\cos(\Omega)-2Aaz\cos(\Omega+qt_s)}{z^2-2az\cos(qt_s)+a^2}-A\cos(\Omega)$

NO 8.10d

- Transformación a través de algoritmos diferencia (TAD)
  - Se trata de convertir una operación de derivada en su correspondiente ecuación diferencia.
  - Existen varias formas de calcular la derivada a partir de datos discretos (Tabla).

Algoritmos para la Diferenciación Discreta		
Diferencia	*Algoritmo*	*Transformación*
Hacia Atrás	$y[n]=\frac{x[n]-x[n-1]}{t_s}$	$s\rightarrow\frac{z-1}{zt_s}$
Central	$y[n]=\frac{x[n+1]-x[n-1]}{2t_s}$	$s\rightarrow\frac{z^2-1}{2zt_s}$
Hacia Adelante	$y[n]=\frac{x[n+1]-x[n]}{t_s}$	$s\rightarrow\frac{z-1}{t_s}$

  - El algoritmo que mejor se comporta en cuanto a la estabilidad es el algoritmo hacia atrás. Por tanto, esta transformación consistirá en sustituir el valor de s en $H(s)$ por $(z-1)/zt_s$ siendo el resultado $H(z)$.

NO 8.10e

- Transformación a través de algoritmos de integración numérica (TAI)
  - Aquí tenemos bastantes más algoritmos para hacer una integración numérica. La Tabla muestra algunos algoritmos típicos.

Algortimos de Integración numérica *Entre paréntesis se indica el orden del algoritmo*	
Algoritmo	*Fórmula para y[n]*
Rectangular(1)	$y[n]=y[n-1]+x[n]t_s$
Trapezoidal(1)	$y[n]=y[n-1]+\frac{\{x[n]-x[n-1]\}t_s}{2}$
Adams(2)	$y[n]=y[n-1]+\frac{\{5x[n]+8x[n-1]-x[n-2]\}t_s}{12}$
Adams(3)	$y[n]=y[n-1]+\frac{\{9x[n]+19x[n-1]-5x[n-2]+x[n-3]\}t_s}{24}$
Simpsom(2)	$y[n]=y[n-2]+\frac{\{x[n]+4x[n-1]+x[n-2]\}t_s}{3}$
Tick(2)	$y[n]=y[n-2]+\{0.3584x[n]+1.2832x[n-1]+0.3584x[n-2]\}t_s$

NO

8.10f

Transformación s→z	
Algoritmo	Transformación
Rectangular (1)	$s \to \frac{1}{t_s}\frac{z-1}{z}$
Trapezoidal (1)	$s \to \frac{2}{t_s}\frac{z-1}{z+1}$
Adams (2)	$s \to \frac{12}{t_s}\frac{z^2-z}{5z^2+8z-1}$
Adams (3)	$s \to \frac{24}{t_s}\frac{z^3-z^2}{9z^3+19z^2-5z+1}$
Simpson (2)	$s \to \frac{3}{t_s}\frac{z^2-1}{z^2+4z+1}$
Tick (2)	$s \to \frac{1}{t_s}\frac{z^2-1}{0.3584z^2+1.2832z+0.3584}$

8.10 Filtros digitales IIR.

Método para convertir las funciones de transferencia analógicas en Funciones de transferencia digitales. Se basa en la *TRANSFORMACIÓN BILINEAL* (mapeo único entre puntos del Plano s en el plano z) :

$$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} \quad ; \qquad H(z) = H_a(s)\big|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}$$

$$z = \frac{2+Ts}{2-Ts} \quad ; \qquad H_a(s) = H(z)\big|_{z=\frac{2+Ts}{2-Ts}}$$

$$z = \frac{2+Ts}{2-Ts} \xrightarrow{s=j\omega} z = \frac{2+T\omega j}{2-T\omega j} \Rightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = 2tg^{-1}\left(\frac{T\omega}{2}\right) \end{cases}$$

Figure 8.24 (p. 646)

Illustration of the properties of the bilinear transform. The left half of the *s*-plane (shown on the left) is mapped onto the interior of the unit circle in the *z*-plane (shown on the right). Likewise, the right half of the *s*-plane is mapped onto the exterior of the unit circle in the *z*-plane. The two corresponding regions are shown shaded.

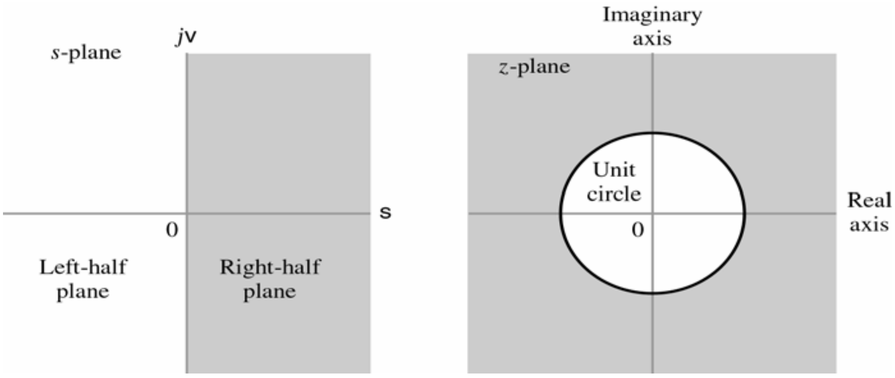
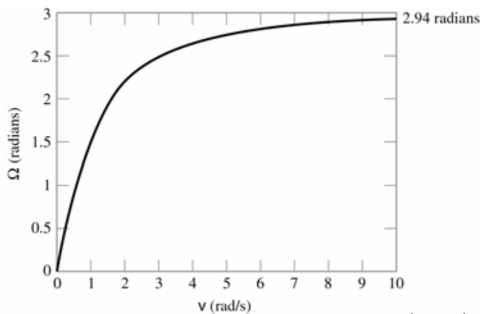


Figure 8.25 (p. 647)

Graphical plot of the relation between the frequency Ω pertaining to the discrete-time domain and the frequency ω pertaining to the continuous-time domain: $\Omega = 2\tan^{-1}(\omega)$.



$$H(z) \xrightarrow{z=e^{j\Omega}} H(e^{j\Omega}) \quad ; \quad \Omega = \arg(z) = 2tg^{-1}\left(\frac{T\omega}{2}\right) \quad ; \quad \omega = \frac{2}{T} tg\frac{\Omega}{2}$$

$$T = 2 \Rightarrow \quad \Omega = 2tg^{-1}(\omega) \quad ; \quad \omega = tg\frac{\Omega}{2}$$

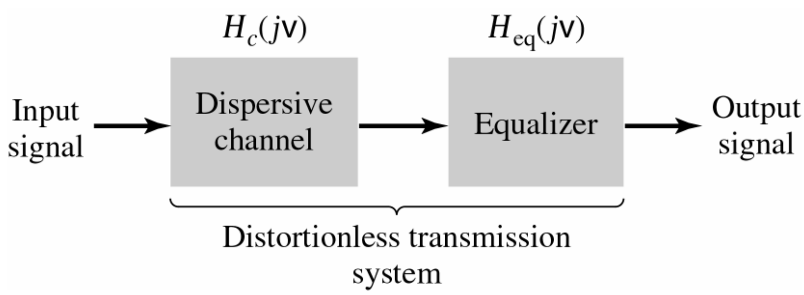
$$-\infty < \omega < \infty \Leftrightarrow -\pi < \Omega < \pi \quad \Rightarrow \textit{distorsión de aladeo}$$

8.11 Distorsión lineal.

- Distorsión de amplitud
- Distorsión o retardo de fase (no lineal con la frecuencia)

8.12 Ecualización.

Para compensar una distorsión lineal.



Problema 8.20

El polinomio del denominador de la función de transferencia de un filtro pasabaja de Buttetworth de orden 5 es :

$$(s+1)\left(s^2+0.618S+1\right)\left(s^2+1.618S+1\right)$$

Encontrar la función de transferencia del correspondiente filtro pasaalta con frecuencia de corte de 1 Hz.

$$pasabaja\ \ H(S)=\frac{1}{(s+1)\left(s^2+0.618S+1\right)\left(s^2+1.618S+1\right)}$$

$$s\to\frac{1}{s}$$

$$pasaalta\ \ H(S)=\frac{1}{\left(\frac{1}{s}+1\right)\left(\frac{1}{s^2}+\frac{0.618}{s}+1\right)\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1.618}{s}+1\right)}$$

$$H(s)=\frac{s^5}{(s+1)\left(s^2+0.618S+1\right)\left(s^2+1.618S+1\right)}$$

Problema 8.21

El polinomio del denominador de la función de transferencia de un filtro pasabaja de Buttetworth de orden 5 es :

$$(s+1)\left(s^2+0.618S+1\right)\left(s^2+1.618S+1\right)$$

con frecuencia de corte de 1 Hz, si queremos modificar dicha frecuencia de corte a cualquier valor , calcular la nueva función de transferencia H_2

$$\omega_c=1 \Rightarrow \; H_1(S)=\frac{1}{(s+1)\left(s^2+0.618S+1\right)\left(s^2+1.618S+1\right)} \; ; \; \omega_c \neq 1 \Rightarrow s \rightarrow \frac{s}{\omega_c} \Rightarrow$$

$$H_2(S)=\frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_c}+1\right)\left(\frac{s^2}{\omega_c^2}+0.618\frac{s}{\omega_c}+1\right)\left(\frac{s^2}{\omega_c^2}+1.618\frac{s}{\omega_c}+1\right)}$$

$$H_2(S)=\frac{\omega_c^5}{(s+\omega_c)\left(s^2+0.618\omega_c S+\omega_c^2\right)\left(s^2+1.618\omega_c S+\omega_c^2\right)}$$

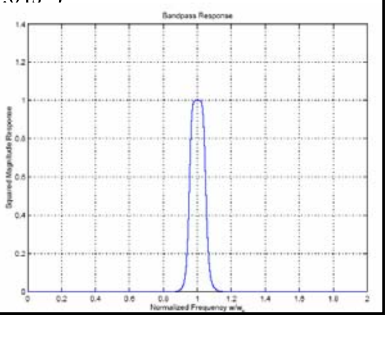
Problema 8.22

Dada la función de transferencia H(s) de un filtros de Butterworth pasabaja de orden 3 y frecuencia de corte unitaria. Determinar la función de transferencia del correspondiente filtro pasabanda con frecuencia de media banda ω_0=1 y ancho de banda B=0.1

$$H(s)=\frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)} \xrightarrow{s \rightarrow \frac{s^2+\omega_0^2}{Bs}=\frac{s^2+1}{0.1s}} H_{pbanda}(s)=\frac{1}{\left(\frac{s^2+1}{0.1s}+1\right)\left\{\left(\frac{s^2+1}{0.1s}\right)^2+\frac{s^2+1}{0.1s}+1\right\}}$$

$$H_{pbanda}(s)=\frac{0.001s^3}{(s^2+0.1s+1)(s^4+2s^2+1+0.1s^3+0.1s+0.01s^2)}$$

$$H_{pbanda}(s)=\frac{0.001s^3}{(s^2+0.1s+1)(s^4+0.1s^3+2.01s^2+0.1s+1}$$



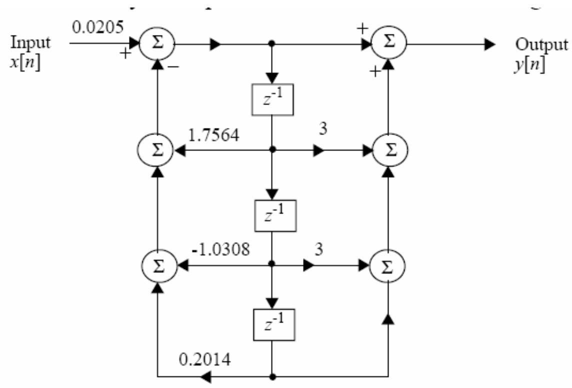
Problema 8.29

Dado un filtro IIR con función de transferencia :

$$H(z)=\frac{0.0181(z+1)^3}{(z-0.50953)(z^2-1.2505z+0.39812)}$$

Formule una forma directa II para realizar esta función de transferencia

$$H(z)=\frac{0.0181(1+3z^{-1}+3z^{-2}+z^{-3})}{1-1.7564z^{-1}+1.0308z^{-2}-0.2014z^{-3}}$$



Problema 8.38

¿Es posible que un filtro digital IIR sea inestable?¿Cómo puede surgir tal condición? Suponiendo que se usa la transformación bilineal, ¿dónde tendrían que estar algunos de los polos de la función de transferencia analógica correspondiente para que esto ocurra?

Para un filtro digital IIR, la función de transferencia puede expresarse Cómo H(z)=N(z)/D(z), donde N(z) y D(z) son polinomios en z^{-1}.
Un filtro es inestable si un polo de H(z) está fuera del circulo de radio Unidad. La transformación bilineal se define como : $H(z)=H_a(s)|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}$

*El semiplano izquierdo del plano s se mapea sobre el interior del circulo Unitario en el plano z.
*El semiplano derecho del plano s se mapea sobre el exterior del circulo Unitario en el plano z.
Si algún polo de la función de transferencia analógica (inestable) está en el semiplano derecho del plano s, entonces algún polo de la función de transferencia digital (inestable) está fuera del circulo unitario.