Soluciones de la primera parte del examen de Matemática Discreta de Junio de 2003

25 de junio de 2003

Pregunta 1 Solución:
a. F, el peso de la palabra es menor que $\delta(C)$.
b. F, la palabra 00000000 está más cerca
c. F, la fórmula está al revés, y además sólo se cumple para árboles
d. V.
e. V.
f. F, los códigos cíclicos son lineales. La matriz se obtiene a partir del polinomio.
g. V.
h. F, el teorema de Euler indica si existe o no un camino que pase una única vez por cada arista.
i. F, el número de elecciones posibles es 12144.
j. F, 5 también es invertible, porque es primo con 8.

Pregunta 2

1. Combinaciones con repetición de 3 elementos de 10 en 10

$$\binom{3+10-1}{10} = \binom{12}{10} = 66$$

   Combinaciones con repetición de 3 elementos de 7 en 7

$$\binom{3+7-1}{7} = \binom{9}{7} = 36$$

2. Combinaciones sin repetición

$$\binom{10}{4}\binom{6}{4}\binom{2}{2} = 3150$$

3. Combinaciones sin repetición

$$\binom{16}{4}\binom{12}{4}\binom{8}{2} = 25225200$$

4. Combinaciones sin repetición

$$\binom{6}{4}\binom{7}{4}\binom{5}{2} = 5250$$

Pregunta 3

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. $n = 6$, $k = 3$ y $r = n - k = 3$.

   La matriz generadora se obtiene permutando las columnas 4 y 2:

   $$H^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   obteniendo la matriz generadora correspondiente

   $$G^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   y volviendo a permutar columnas

   $$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. La distancia mínima se obtiene buscando sumas de columnas que den el vector nulo. El menor número de columnas que suman 0 es tres, por lo que la distancia mínima del código es $\delta(C) = 3$.

   La tabla de síndromes completa es la siguiente:

Líder	Síndrome
000000	000
100000	101
010000	100
001000	011
000100	111
000010	010
000001	001
010010	110

3. Mensajes:

   - $x = 101101$, $Hx = 000$, con lo que $x \in C(n, k)$. Según la matriz generadora obtenida, G, los bits del mensaje están en las posiciones 1, 4 y 3, $m_1 = x_1$, $m_2 = x_4$ y $m_3 = x_3$, con lo que $m = 101$.
   - $x = 100001$, $Hx = 100$, con lo que $x \notin C(n, k)$ debido al error asociado a Hx, $e = 010000$. Corregimos a la palabra $x + e = 110001$, y $m = 100$.
   - $x = 011011$, $Hx = 100$, con lo que $x \notin C(n, k)$ debido al mismo error que antes. Corregimos a la palabra $x + e = 001011$, y $m = 001$.

4. La palabra $x = 100001$ tiene peso $w(x) = 2 < \delta(C)$. Por lo tanto, al ser el código lineal y cumplirse que $w_{min} = \delta(C)$, no es necesario multiplicarla por la matriz de paridad H para poder afirmar que no pertenece al código. Además, la distancia de Hamming de esta palabra a la fila 2 de la matriz generadora G, es 1, con lo que la corrección se realizará al vector que forma la fila dos de la matriz, que pertenece al código.

Pregunta 4 y 5 Teoría

Pregunta 6 En este ejercicio se pueden considerar dos posibilidades. La primera es que cada los nodo está relacionado con él mismo y la segunda es que no lo esté si no hay un lazo que lo indique.

Primera posibilidad: los elementos de la diagonal de todas las matrices de adyacencia son 1.

1. Grafo A.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad M \odot M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Dado que hay 1's en $M \odot M$ que no están en M, no es transitivo.

2. Grafo B.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad M \odot M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Es transitivo.

3. Grafo C.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad M \odot M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   No es transitivo

4. Grafo D.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad M \odot M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Es transitivo

Segunda posibilidad: si se considera que los nodos no están autorelacionados. Entonces los elementos de las diagonales de las matrices de adyacencia serán 0.

1. Grafo A.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad M \odot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Grafo B.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad M \odot M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Grafo C.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad M \odot M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Grafo D.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad M \odot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ninguno de los grafos es transitivo considerada esta posibilidad.
Ambas posibilidades son respuestas válidas.

Pregunta 7

1. Pasos para resolverla:
   - Obtener el polinomio $h(x)$ de paridad a partir de los elementos de la matriz.
   - Dividir el polinomio $x^7 - 1$ por $h(x)$, obteniendo $g(x)$.
   - Construir la matriz generadora G utilizando los coeficientes del polinomio $g(x)$.

2. La codificación de las palabras de forma no sistemática se obtiene multiplicándolas por la matriz G.

   La codificación sistemática, por medio del algoritmo explicado en clase.