EJERCICIOS DE LÓGICA PROPOSICIONAL Y LÓGICA DE PREDICADOS

1. Representar las frases siguientes, de forma simbólica, utilizando proposiciones. Definir claramente qué significa cada variable.

a) Aunque Juan tenía una mente fina y analítica y grandes riquezas, estaba incomprensiblemete loco.
b) María es alta, pero Jaime es pequeño y ágil.
c) Si no te vas, llamaré a la policía.
d) Si la liebre está alerta y es rápida, ni el zorro ni el lince podrán atraparla.
e) Es un día agradable si está soleado, pero sólo si no hace calor.
f) Dos niños tienen los mismos tíos si y sólo si tienen la misma madre y el mismo padre.

2. Construir las tablas de verdad de las proposiciones siguientes. Identificar las tautologías.

a) $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$

b) $((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow \sim r)) \Rightarrow (p \wedge q)$

c) $p \wedge (q \vee r) \Rightarrow s$

d) $(((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$

e) $((p \Rightarrow (q \wedge \sim q)) \Rightarrow p)$

f) $(p \Rightarrow q) \vee (p \Leftrightarrow \sim q)$

3. Demostrar que $\sim (p \vee q)$ y $(\sim p \wedge \sim q)$ tienen la misma tabla de verdad.

4. Utilizar tablas de verdad para demostrar que las expresiones siguientes son equivalencias.

a) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

b) $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

c) $p \Rightarrow q \equiv \sim (p \wedge \sim q)$

d) $p \vee$ **falso** $\equiv p$

e) $p \wedge$ **verdadero** $\equiv p$

f) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

5. Simplificar las proposiciones siguientes, encontrando otra equivalente con menos operadores y/o variables:

a) $(p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$

b) $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

c) $p \vee (\sim p \wedge \sim q)$

d) $\sim p \Rightarrow p$

e) $p \Rightarrow \sim p$

f) $((p \vee q) \Rightarrow q \wedge \sim q)) \Rightarrow \sim p$

6. La función **nand** se define mediante la tabla de verdad siguiente:

p	*q*	*p* **nand** *q*
verdadero	**verdadero**	**falso**
verdadero	**falso**	**verdadero**
falso	**verdadero**	**verdadero**
falso	**falso**	**verdadero**

Demostrar que los operadores $\sim$, $\wedge$, $\vee$, y $\Rightarrow$ pueden definirse utilizando la función **nand**. Es decir, encontrar proposiciones construidas sólo con p's, q's y operadores **nand** cuyas tablas de verdad sean iguales a las de $\sim p$, $p \vee q$, $p \wedge q$ y $p \Rightarrow q$, respectivamente.

7. Demostrar que las proposiciones siguientes son tautologías, utilizando reglas de equivalencia que las hagan equivalentes al valor **verdadero**:

a) $(\sim p \vee q) \Rightarrow (q \vee \sim p)$

b) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

c) $(p \Rightarrow \sim p) \Rightarrow \sim p$

d) $((p \vee q) \wedge \sim p) \Rightarrow q$

e) $((p \vee q) \wedge (p \Rightarrow s) \wedge (q \Rightarrow s)) \Rightarrow s$

f) $((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r)$

g) $((p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)) \Rightarrow ((p \vee r) \Rightarrow (q \vee s))$

h) $((p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \wedge (\sim q \vee s)) \Rightarrow \sim p \vee \sim r$

8. Utilizando reglas de inferencia, demostrar las tautologías de la a) a la d) del Ejercicio 7.

9. Utilizando reglas de inferencia, demostrar las siguientes deducciones:

a) $p \Rightarrow (q \vee r), q \Rightarrow r, r \Rightarrow s \vdash p \Rightarrow s$

b) $p \Rightarrow \sim q, r \Rightarrow q \vdash \sim(p \wedge r)$

c) $\vdash ((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow s)) \Rightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow (r \wedge s))$

10. Dada la proposición $((p \vee q) \wedge \sim p) \Rightarrow q$.

a) Demostrar que es una tautología, utilizando una tabla de verdad.

b) Demostrar que es equivalente a la oración siguiente, si se realiza una asignación apropiada de variables a cada frase.
"O los Red Sox son mejores que los A-es o los Piratas son mejores que los Red. Los Red Sox no son mejores que los A-es. Por tanto, los Piratas son mejores que los Red".

c) Demostrar que la proposición es una tautología, utilizando las equivalencias y reglas de inferencia apropiadas.

11. Demostrar el siguiente argumento mediante lógica proposicional:

Si dos gases tienen la misma temperatura, entonces sus moléculas tienen el mismo promedio de energía cinética. Volúmenes iguales de dos gases tienen el mismo número de moléculas. Las presiones de dos gases son iguales si es el mismo su número de moléculas y sus energías cinéticas son iguales. Por consiguiente, si dos gases tienen la misma temperatura y el mismo volumen, tienen la misma presión.

12. Representar las siguientes frases en Lógica de Predicados:

a) Hay alguien que conoce a todo el mundo.
b) Todo el mundo tiene alguien que sea su madre.
c) Nadie es perfecto.
d) Todos los perros son mamíferos y todos los mamíferos tienen pelo.
e) Hay perros que son de color rojo.
f) Solo ladran los perros.
g) Juan es hijo de Pepe si y sólo si Pepe es padre de Juan.
h) El abuelo de Juan es el padre del padre de Juan.

13. Supóngase que se define un tablero de ajedrez como $\{(i, j) \mid 1 \leq i \leq 8 \wedge 1 \leq j \leq 8\}$. Supongamos que el par (1, 1) define el cuadrado de la esquina inferior izquierda del tablero, la casilla es negra, y las blancas ocupan inicialmente las dos filas inferiores del tablero. Sea *casilla* una función de dos parámetros que representa una casilla del tablero, la casilla inferior izquierda se representará como *casilla(1, 1)*. Sea *pos* un predicado que indica qué hay en una posición determinada del tablero, si la casilla (4,7) está vacía, escribiremos *pos(casilla(4, 7), vacia)*; si la casilla (1, 5) contiene el rey blanco, escribiremos *pos(casilla(1, 5), rb)*. Escribir predicados para describir las frases siguientes:

a) La reina blanca ha sido capturada.
b) Las negras conservan sus alfiles.
c) Una torre blanca está en la misma fila que la reina negra.
d) Un peón blanco está atacando al rey negro.
e) Una torre blanca está atacando a la reina negra.
f) Un alfil blanco está atacando al rey negro.

14. Demostrar mediante reglas de inferencia:

a) $\forall X (p(X) \Rightarrow q(X)), \forall X \sim q(X) \vdash \forall X \sim p(X)$.

b) $\exists X (\exists Y : p(X, Y)) \vdash \exists Y (\exists X\, p(X, Y))$

c) $\forall X\, p(X) \vdash \exists X\, p(X)$

d) $\forall X \sim p(X) \vdash \sim \exists X\, p(X)$

15. Demostrar mediante reglas de inferencia que :

$\forall X \sim p(X) \Leftrightarrow \sim \exists X\, p(X)$

es una fórmula bien formada válida.