5

Notas sobre corriente alterna

Jaime Planas Rosselló

Noviembre de 2000

Un buen número de transductores funcionan alimentados por una tensión alterna. Entre ellos destacan los captadores capacitivos (condensadores de capacidad variable) y los inductivos (bobinas de autoinducción variable). Para comprender el funcionamiento de esta clase de transductores y el de los sistemas que acondicionan su señal, es preciso recordar las nociones básicas de los circuitos de corriente alterna.

Comenzaremos por repasar los componentes básicos en cualquier circuito de corriente alterna, para definir a continuación qué se entiende por corriente alterna, como puede ésta ser representada mediante magnitudes complejas, y como la respuesta intensidad-tensión en un elemento puede ser descrito mediante una impedancia compleja. Determinaremos a continuación la impedancia compleja de los elementos básicos de un circuito, estableceremos las ecuaciones que gobiernan los circuitos de corriente alterna, y las aplicaremos a algunos ejemplos.

5.1 Componentes elementales

Los componentes básicos en un sistema de corriente alterna son las resistencias, los condensadores y las autoinducciones, cuyos símbolos gráficos pueden verse en la Figura 5.1.1.

La resistencia está caracterizada por el valor R de su resistencia, y, en todo instante t, la relación entre la diferencia de potencial $v(t)$ aplicada entre sus extemos y la intensidad $i(t)$ que la atraviesa (Fig. 5.1.2a), viene dada por la ley de Ohm

$$i(t)R = v(t) \tag{5.1.1}$$

El condensador está caracterizado por su capacidad C, y, en todo instante, la relación entre la diferencia de potencial $v(t)$ aplicada entre sus armaduras y la carga de su armadura positiva $q(t)$, viene dada por

$$q(t) = Cv(t) \tag{5.1.2}$$

Si la carga varía a lo largo del tiempo, una intensidad $i(t)$ fluye hacia la armadura positiva (y otra igual fluye desde la placa negativa) como muestra la Fig. 5.1.2b. Puesto que la intensidad es la carga que fluye por unidad de tiempo, tenemos que $i(t) = dq/dt$, por lo que derivando la ecuación (5.1.2)

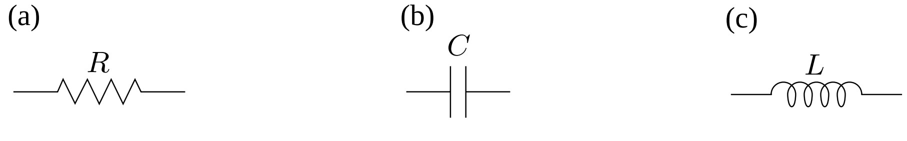


Figura 5.1.1 Símbolos de los componentes elementales de un circuito: (a) resistencia, (b) condensador, y (c) autoinducción.

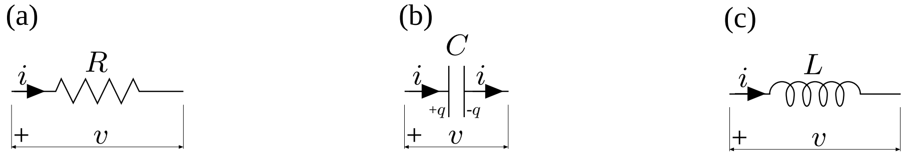


Figura 5.1.2 Tensión e intensidad en componentes elementales: (a) resistencia, (b) condensador, y (c) autoinducción.

obtenemos la siguiente relación entre la intensidad y la tensión aplicada:

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \tag{5.1.3}$$

Nótese que esta relación es una *ecuación diferencial*. La intensidad no depende de la diferencia de potencial aplicada, sino de de su derivada.

La autoinducción está caracterizada por el coeficienete de autoinducción L y, en todo instante, la relación entre la diferencia de potencial $v(t)$ aplicada entre sus extremos y la velocidad $di(t)/dt$ a la que cambia la intensidad que la atraviesa viene dada por (Fig. 5.1.2c)

$$L\frac{di(t)}{dt} = v(t) \tag{5.1.4}$$

De nuevo esta relación es una ecuación diferencial, en cierto modo complementaria de la (5.1.3), en la que la tensión depende de la derivada de la intensidad.

5.2 Corriente alterna

5.2.1 Definición

La corriente alterna aparece cuando un circuito constituido por resistencias, condensadores y autoinducciones conectados entre sí, se alimenta con una fuerza electromotriz $e(t)$ que varía de forma armónica (alterna) a lo largo del tiempo. Esto significa que la fuerza electromotriz sigue una ley de la forma

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t + \phi_E) \tag{5.2.1}$$

donde E_0 es la amplitud de la fuerza electromotriz, ω su frecuencia angular y ϕ_E su fase inicial (el argumento de la función coseno, $\omega t + \phi_E$, es la fase en el instante t).

Cuando la alimentación es armónica, las intensidades y caidas de tensión en cada elemento del circuito son también armónicas una vez establecido el régimen estacionario. Considerando un elemento arbitrario que representamos gráficamente por un rectángulo, como se indica en la Fig. 5.2.1a, y que llamamos genéricamente *impedancia*, la propiedad anterior implica que la tensión $v(t)$ y la intensidad $i(t)$ podrán escribirse en la forma

$$v(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi_V) \tag{5.2.2}$$

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi_I) \tag{5.2.3}$$

donde V_0 e I_0 son las amplitudes de la tensión e intensidad, y ϕ_V y ϕ_I sus fases iniciales.

Aunque las expresiones anteriores pueden utilizarse para estudiar la relación entre intensidad y tensión en cualquier componente, su uso directo conduce a desarrollos muy prolijos y es mejor utilizar una formulación en numeros complejos.

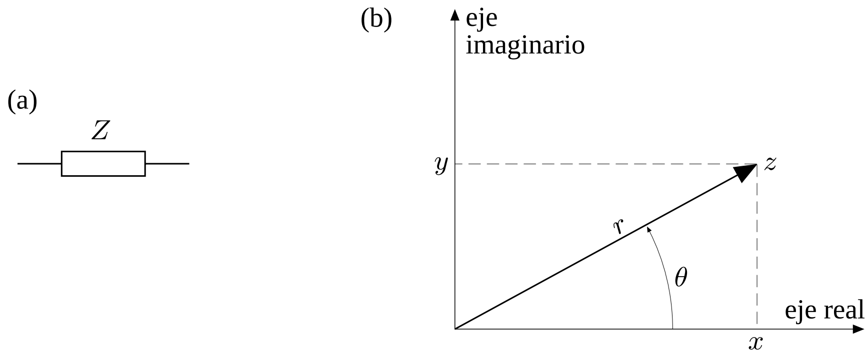


Figura 5.2.1 (a) Símbolo para una impedancia arbitraria. (b) Representación gráfica de un número complejo.

5.2.2 Tensión e intensidad complejas

Para fijar la notación, recordaremos aquí que un número complejo z está caracterizado por su parte real x y su parte imaginaria y, y escribimos

$$z = x + y\,j \tag{5.2.4}$$

donde j representa la unidad imaginaria, tal que $j^2 = -1$ (se usa j en lugar de la designación usual en matemáticas i para que no haya confusión con el valor instantáneo de la intensidad).

Un número complejo z puede representarse gráficamente como un vector de componente horizontal x y componente vertical y (Fig. 5.2.1b). Como es obvio, también se puede caracterizar por su módulo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y su argumento $\theta = \arctan(y/x)$ (ver Fig. 5.2.1b). La notación exponencial resulta particularmente cómoda:

$$z = r\,e^{\theta j} \tag{5.2.5}$$

siendo $e^{\theta j} = \cos\theta + j\ \mathrm{sen}\theta$.

Con esta notación, resulta obvio que $v(t)$ en la ecuación (5.2.2) puede escribirse como la parte real de un número complejo de módulo V_0 y argumento $\omega t + \phi_V$:

$$v(t) = \ \mathrm{Re}\left[V_0 e^{(\omega t + \phi_V)j}\right] = \ \mathrm{Re}\left[V_0 e^{\phi_V j} e^{\omega t j}\right] \tag{5.2.6}$$

donde $\mathrm{Re}(z)$ indica la parte real del número complejo z. La última expresión, que sigue trivialmente de la que la precede, muestra que es posible escribir $v(t)$ como la parte real del producto de dos complejos: el primero constante de módulo V_0 y argumento ϕ_V y el segundo dependiente del tiempo, de módulo 1 y argumento ωt. LLamamos al primero de estos complejos la *tensión compleja* $\tilde{V}$:

$$\tilde{V} = V_0 e^{\phi_V j} \tag{5.2.7}$$

con cuya definición la tensión instantánea puede se reduce a

$$v(t) = \ \mathrm{Re}\left[\tilde{V} e^{\omega t j}\right] \tag{5.2.8}$$

De forma completamente análoga podemos tratar la ecuación (5.2.3) para la intensidad instantánea $i(t)$, de manera que podemos definir una *intensidad compleja* $\tilde{I}$ como

$$\tilde{I} = I_0 e^{\phi_I j} \tag{5.2.9}$$

con cuya definición la intensidad instantánea se reduce a

$$i(t) = \ \mathrm{Re}\left[\tilde{I} e^{\omega t j}\right] \tag{5.2.10}$$

5.2.3 Impedancia compleja

Llamamos impedancia compleja $\tilde{Z}$ al número complejo que multiplicado por la intensidad compleja da como resultado la tensión compleja, es decir

$$\tilde{Z}\tilde{I} = \tilde{V} \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{Z} = \frac{\tilde{V}}{\tilde{I}} \tag{5.2.11}$$

La impedancia compleja $\tilde{Z}$ puede escribirse en la forma modulo-argumental sustituyendo en la ecuación anterior las ecuaciones (5.2.7) y (5.2.9)

$$\tilde{Z} = \frac{V_0}{I_0} e^{(\phi_V - \phi_I)j} = Z e^{-\phi j} \qquad \text{con} \qquad \phi = \phi_I - \phi_V \tag{5.2.12}$$

donde el módulo Z —denominado *impedancia*— resulta ser ni más ni menos que el cociente entre las amplitudes de la tensión y de la intensidad, y el argumento $-\phi$ es la diferencia de los argumentos de $\tilde{I}$ y de $\tilde{V}$ cambiada de signo. Nótese que ϕ coincide con la diferencia entre las fases de la intensidad y de la tensión instantánea, tal como aparecen en (5.2.2) y (5.2.3), ya que el término ωt es común. Cuando $\phi > 0$ se dice que la intensidad está *adelantada* con respecto a la tensión, cuando $\phi < 0$ se dice que está *retrasada*, y cuando $\phi = 0$ se dice que intensidad y tensión están *en fase*.

Por razones que serán evidentes más adelante, la parte real de la impedancia compleja se denomina la componente *resistiva*. La parte imaginaria es la componente *reactiva*. En general se escribe

$$\tilde{Z} = R_Z + X_Z j \tag{5.2.13}$$

y R_Z es la componente resistiva o resistencia y X_Z la componente reactiva o *reactancia*.

5.3 Ecuaciones complejas para los elementos básicos

5.3.1 Resistencias

Consideremos en primer lugar una resistencia sometida a una tensión armónica. Utilicemos las expresiones complejas (5.2.8) y (5.2.10) para $v(t)$ e $i(t)$ y sustituyamoslas en la ecuación (5.1.1). El resultado es

$$R \ \mathrm{Re}\left[\tilde{I} e^{\omega t j}\right] = \ \mathrm{Re}\left[\tilde{V} e^{\omega t j}\right] \tag{5.3.1}$$

que puede reescribirse como

$$\mathrm{Re}\left[(R\tilde{I} - \tilde{V}) e^{\omega t j}\right] = 0 \tag{5.3.2}$$

Ahora bien, es muy facil demostrar la siguiente propiedad, cuya demostración se deja como ejercicio (véase ejercicio 5.1):

Propiedad 5.1 Si $\tilde{A}$ es un número complejo *constante*, la condición $\mathrm{Re}\left[\tilde{A} e^{\omega t j}\right] = 0$ puede satisfacerse en todo instante t si y solo si el complejo $\tilde{A}$ es idénticamente nulo.

. Esta propiedad implica que la expresión entre paréntesis en la ecuación anterior debe ser nula, es decir que para una resistencia se cumple

$$R\tilde{I} = \tilde{V} \tag{5.3.3}$$

La impedancia compleja correspondiente a una resistencia, $\tilde{Z}_R$, se deduce de la ecuación (5.2.11) sin más que sustituir en ella la expresión para $\tilde{V}$ que aparece en la ecuación anterior. El resultado es

$$\tilde{Z}_R = \frac{R\tilde{I}}{\tilde{I}} = R \tag{5.3.4}$$

lo que indica que la impedancia compleja para la resistencia es real y por tanto, como cabía esperar es púramente resistiva. Obviamente su módulo (la impedancia) vale R y su argumento es nulo, lo que indica que el desfase entre tensión e intensidad es nula (es decir que $\phi_V = \phi_I$ y la intensidad y la tensión están en fase).

5.3.2 Condensadores

En el caso de un condensador, sustituimos (5.2.8) y (5.2.10) en (5.1.3) y obtenemos

$$\mathrm{Re}\left[\tilde{I}e^{\omega t j}\right] = C\,\frac{d}{dt}\mathrm{Re}\left[\tilde{V}e^{\omega t j}\right] = \mathrm{Re}\left[C\omega j\,\tilde{V}\,e^{\omega t j}\right] \tag{5.3.5}$$

donde la segunda igualdad se obtiene sin más que efectuar las operaciones indicadas de multiplicación y derivación. De la igualdad anterior se deduce que

$$\mathrm{Re}\left[(\tilde{I} - C\omega j\,\tilde{V})\,e^{\omega t j}\right] = 0 \tag{5.3.6}$$

y de aquí se deduce, por la propiedad antes enunciada, que el término entre paréntesis debe ser nulo, es decir que

$$\tilde{I}\frac{1}{C\omega j} = \tilde{V} \tag{5.3.7}$$

y aplicando la definición 5.2.11 obtenemos la impedancia compleja para $\tilde{Z}_C$ para un condensador como

$$\tilde{Z}_C = \frac{1}{C\omega j} = -\frac{1}{C\omega}j = \frac{1}{C\omega}e^{-\frac{\pi}{2}j} \tag{5.3.8}$$

lo que indica que la impedancia compleja para un condensador es imaginaria y por tanto es una reactancia pura. Además la reactancia es negativa, por lo que en general una impedancia con parte imaginaria negativa se dice que tiene *reactancia capacitiva*. Vemos además que $\phi = \pi/2$, por lo que la intensidad está adelantada $\pi/2$ con respecto a la tensión.

5.3.3 Autoinducciones

En el caso de una autoinducción, sustituimos (5.2.8) y (5.2.10) en (5.1.4) y obtenemos

$$L\,\frac{d}{dt}\mathrm{Re}\left[\tilde{I}e^{\omega t j}\right] = \mathrm{Re}\left[\tilde{V}e^{\omega t j}\right] \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{Re}\left[L\omega j\,\tilde{I}e^{\omega t j}\right] = \mathrm{Re}\left[\tilde{V}e^{\omega t j}\right] \tag{5.3.9}$$

donde la segunda igualdad se obtiene sin más que efectuar las operaciones indicadas de multiplicación y derivación. De la igualdad anterior se deduce que

$$\mathrm{Re}\left[(L\omega\tilde{I} - \tilde{V})\,e^{\omega t j}\right] = 0 \tag{5.3.10}$$

y de aquí se deduce, de nuevo por la propiedad antes enunciada, que el término entre paréntesis debe ser nulo, es decir que

$$\tilde{I}L\omega j = \tilde{V} \tag{5.3.11}$$

y aplicando la definición 5.2.11 obtenemos la impedancia compleja para $\tilde{Z}_L$ para una autoinducción como

$$\tilde{Z}_L = L\omega j = L\omega e^{\frac{\pi}{2}j} \tag{5.3.12}$$

lo que indica que la impedancia compleja de una autoinducción es también imaginaria pura y, por tanto, es una *reactancia*. En este caso, la parte imaginaria es positiva por lo que, en general, las reactancias positivas se denominan *reactancias inductivas*. Puesto que el argumento de $\tilde{Z}$ es $-\phi$ resulta que para una autoinducción $\phi = -\pi/2$, por lo que la intensidad está en este caso retrasada $\pi/2$ con respecto a la tensión.

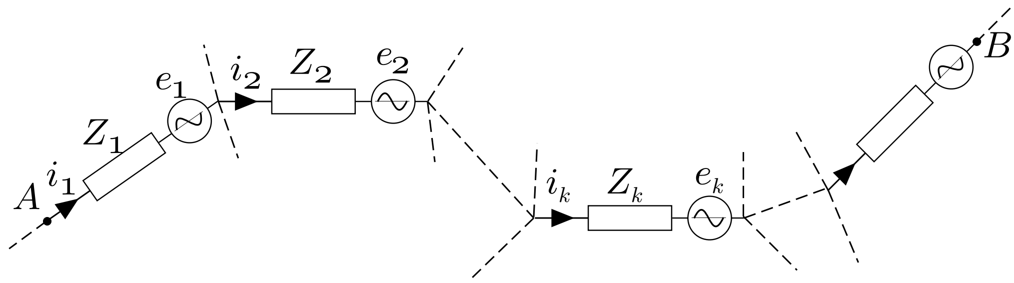


Figura 5.4.1 Caida de tensión en un circuito arbitrario de corriente alterna

5.4 Circuitos de corriente alterna

Los circuitos de corriente alterna se resuelven utilizando los mismos lemas de Kirchhoff que se utilizan en corriente continua, pero trabajando con variables complejas. Por ejemplo, el primer lema de Kirchhoff se deduciría de escribir que la suma de las intensidades *instantáneas* que entran en un nodo es cero, es decir:

$$\sum_{\text{nudo}} i_k = 0 \tag{5.4.1}$$

Usando la expresión (5.2.10) para la intensidad instantánea y operando, la ecuación se reduce a

$$\mathrm{Re}\left[\left(\sum_{\text{nudo}} \tilde{I}_k\right) e^{\omega t j}\right] = 0 \tag{5.4.2}$$

Lo que implica, de acuerdo con la propiedad 5.1, que el sumatorio entre paréntesis debe ser nulo y por tanto el primer lema de Kirchhoff se reduce a decir que la suma de intensidades complejas que entran en un nodo es nula:

$$\sum_{\text{nudo}} \tilde{I}_k = 0 \tag{5.4.3}$$

De forma análoga, si en un circuito formado por impedancias y fuerzas electromotrices alternas (de la *misma frecuencia*), tal como esquematiza la figura 5.4.1, consideramos el camino que une los puntos A y B, la diferencia de potencial entre ambos puntos viene dada por

$$v_{AB} = \sum_{\text{camino}} v_{Z_k} - \sum_{\text{camino}} e_k \tag{5.4.4}$$

donde v_{Z_k} es la caida de tensión instantánea en la impedancia Z_k y e_k la k-sima fuerza electromotriz instantánea. Operando como en el caso anterior, con las fuerzas electromotrices instantáneas dadas por una fórmula análoga a la (5.2.8), resulta finalmente

$$v_{AB} = \sum_{\text{camino}} \tilde{I}_k \tilde{Z}_k - \sum_{\text{camino}} \tilde{E}_k \tag{5.4.5}$$

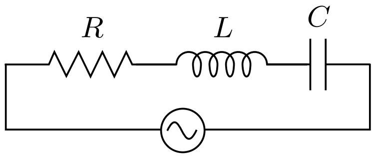
donde $\tilde{E}_k$ es, naturalemente, la k-sima fuerza electromotriz compleja.

Cuando se elige un camino cerrado, la diferencia de potencial del primer miembro es nula y, en consecuencia obtenemos el segundo lema de Kirchhoff (regla de las mallas) para corriente alterna:

$$\sum_{\text{malla}} \tilde{I}_k \tilde{Z}_k = \sum_{\text{malla}} \tilde{E}_k \tag{5.4.6}$$

que se limita a establecer que a lo largo de un circuito cerrado (malla) la suma de las caidas de tensión complejas en las distintas impedancias es igual a la suma de las fuerzas electromotrices complejas.

Ejemplo 5.4.1 Consideremos el circuito de la figura, denominado, por razones obvias, *circuito RLC*:



Supongamos que la fuerza electromotriz tiene una amplitud E_0 y fase inicial nula, $\phi_E = 0$. [1] De acuerdo con esto, $\tilde{E} = E_0$ y la fem compleja es real. En este circuito no hay nudos, y la intensidad que atraviesa todas las impedancias es la misma, por lo que lo es también la intensidad compleja. Aplicando la segunda regla de Kirchhoff al circuito completo tendremos:

$$\tilde{Z}_R\tilde{I} + \tilde{Z}_L\tilde{I} + \tilde{Z}_C\tilde{I} = \tilde{E} \qquad \Rightarrow \qquad (\tilde{Z}_R + \tilde{Z}_L + \tilde{Z}_C)\tilde{I} = \tilde{E} \tag{5.4.7}$$

La segunda ecuación indica que la impedancia compleja equivalente de un acoplamiento en serie de impedancias es la suma de las impedancias complejas. En particular la impedancia equivalente $\tilde{Z}$ puede obtenerse sustituyendo las expresiones antes obtenidas para la impedancia de los componentes básicos, con el resultado siguiente:

$$\tilde{Z} = R + L\omega j + \frac{1}{C\omega j} = R + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) j \tag{5.4.8}$$

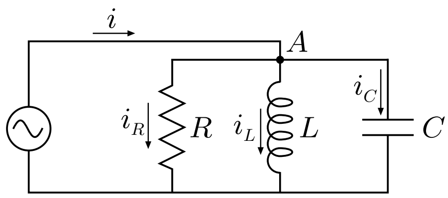
La intensidad viene dada por $\tilde{I} = \tilde{E}/\tilde{Z}$, por lo que su amplitud y fase de la intensidad serán

$$I_0 = \frac{E_0}{\left|\tilde{Z}\right|} = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \tag{5.4.9}$$

$$\phi_I = \phi = -\arg(\tilde{Z}) = -\,\mathrm{arctan}\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right) \tag{5.4.10}$$

Nótese que las componentes reactivas inductiva y la capacitiva tienen efectos contrarios. En particular, cuando $LC\omega^2 = 1$ la reactancia del circuito se anula. Se dice entonces que el circuito RLC está en *resonancia* y que la frecuencia angular ω es la de resonancia, caracterizada por ser la frecuencia para la cual, dados R, L y C, el módulo de la impedancia compleja es mínimo y la amplitud de la intensidad es máxima. □

Ejemplo 5.4.2 Consideremos el circuito de la figura en el que los componentes se conectan en paralelo:



Supongamos, como antes, que la fuerza electromotriz tiene una amplitud E_0 y fase inicial nula, con lo que $\tilde{E} = E_0$. En este circuito deben escribirse las ecuaciones de un nudo, el A, por ejemplo, y las de tres mallas, por ejemplo las que incluyen la fuerza electromotriz y cada una de los componentes. Las ecuaciones correspondientes son:

$$\tilde{I} = \tilde{I}_R + \tilde{I}_L + \tilde{I}_C \tag{5.4.11}$$

$$\tilde{Z}_R\tilde{I}_R = \tilde{E} \tag{5.4.12}$$

$$\tilde{Z}_L\tilde{I}_L = \tilde{E} \tag{5.4.13}$$

$$\tilde{Z}_C\tilde{I}_C = \tilde{E} \tag{5.4.14}$$

[1] Nótese que siempre es posible elegir el origen de tiempos de forma que la fase inicial de una de las variables armónicas del problema sea nula.

(5.4.15)

Despejando $\tilde{I}_R, \tilde{I}_L$ e $\tilde{I}_C$ en las tres últimas ecuaciones y sustituyendo en la primera resulta

$$\tilde{I} = \tilde{E}\left(\frac{1}{\tilde{Z}_R} + \frac{1}{\tilde{Z}_L} + \frac{1}{\tilde{Z}_C}\right) \tag{5.4.16}$$

Donde se observa que la impedancia equivalente $\tilde{Z} = \tilde{E}/\tilde{I}$ cumple la regla clásica: su inversa es igual a la suma de las inversas de las impedancias de cada brazo. Por otra parte, sustituyendo las expresiones para las impedancias en este caso obtenemos

$$\frac{1}{\tilde{Z}} = \frac{1}{R} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right) j \tag{5.4.17}$$

La amplitud y fase de la intensidad resultan ser:

$$I_0 = E_0 \left|\frac{1}{\tilde{Z}}\right| = E_0 \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2} \tag{5.4.18}$$

$$\phi_I = \phi = -\arg(\tilde{Z}) = \arg(1/\tilde{Z}) = \arctan\left[R\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)\right] \tag{5.4.19}$$

De nuevo, cuando $LC\omega^2 = 1$ la reactancia del circuito se anula. Se dice entonces que el circuito está en *antiresonancia* porque para esa frecuencia dados E_0, R, L y C, el módulo de la impedancia compleja es máximo y la amplitud de la intensidad es mínima. $\square$

5.4.1 Valores efectivos de la tensión y la intensidad

Se llama valor efectivo de una magnitud alterna al valor cuadrático medio de la misma (en inglés RMS, de *Root Mean Square*). Los aparatos de medida están diseñados para dar los valores efectivos de las magnitudes alternas, y estos son los valores que se manejan en la práctica. Así, cuando se dice que la tensión de la red en España es de 220 V, se quiere decir que *el valor efectivo* de la tensión es de 220 V.

El valor efectivo de la tensión o la intensidad es proporcional a la amplitud. Considerando, por ejemplo, la intensidad, su valor efectivo I será la raiz cuadrada del valor medio sobre un periodo completo de la intensidad al cuadrado, es decir:

$$I = \left[\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} i^2(t)\, dt\right]^{1/2} \tag{5.4.20}$$

donde $T = 2\pi/\omega$ es el periodo y t_0 un instante cualquiera. Sustituyendo la expresión para la intensidad instantánea y operando resulta

$$I = \left[\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} I_0^2 \cos^2(\omega t + \phi_I)\, dt\right]^{1/2} \tag{5.4.21}$$

La integral se resuelve fácilmente a partir de la igualdad $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + cos2\alpha)$, con lo que después de operar, y dado que $\text{sen}(x + 4\pi) = \text{sen}x$, resulta que la integral es igual a $I_0^2 T/2$, por lo que la intensidad efectiva resulta

$$I = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \tag{5.4.22}$$

y , en general, el valor efectivo de cualquier magnitud alterna es igual a su amplitud dividida por $\sqrt{2}$.

Ejercicios

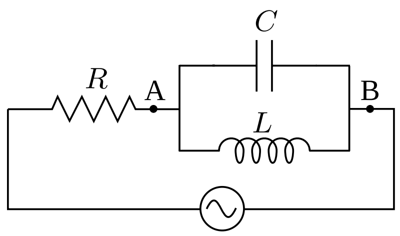
5.1 Demostrar que si $\tilde{A}$ es un número complejo *constante*, la condición Re $\left[\tilde{A}e^{\omega t j}\right] = 0$ puede satisfacerse en todo instante t si y solo si el complejo $\tilde{A}$ es idénticamente nulo. (Sugerencias: (a) desarróllese la expresión en función de las partes real e imaginaria de $\tilde{A}$ y verifíquese que ambas deben ser nulas; (b) úsese la forma exponencial para $\tilde{A}$ y compruébese que su módulo tiene que ser nulo.)

5.2 Un circuito está formado por una resistencia de 100 Ω en serie con una autoinducción de 1.2 mH. Determinar la impedancia compleja, su módulo y el ángulo de desfase ϕ para corrientes con una frecuencia de (a) 50 Hz, y (b) 5 kHz. [Solución: (a) $\tilde{Z} = 100 + 0.377j\ \Omega,\ Z = 100.0\ \Omega,\ \phi = -0.00377$ rad = -0.216°; (a) $\tilde{Z} = 100 + 377j\ \Omega,\ Z = 390\ \Omega,\ \phi = -1.312$ rad = -75.14°.]

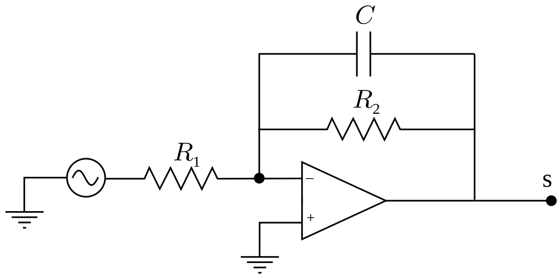
5.3 Un circuito está formado por una resistencia de 100 Ω en serie con una autoinducción de 0.9 H y un condensador de 2 µF. Determinar la impedancia compleja, su módulo y el ángulo de desfase ϕ si se aplica una fuerza electromotriz alterna con una frecuencia angular de 500 rad/s. [Solución: $\tilde{Z} = 300 - 550j\ \Omega,\ Z = 626.5\ \Omega,\ \phi = 1.071$ rad = 61.39°.]

5.4 Una bobina tiene una resistencia de 20 Ω. A 100 Hz de frecuencia la intensidad y la tensión están desfasadas 30°. Determinar el la impedancia compleja de la bobina y el coeficiente de autoinducción de la bobina. [Solución: $\tilde{Z} = 20 + 20/\sqrt{3}j$, L = 18.38 mH.]

5.5 En el circuito de la figura la fuerza electromotriz aplicada es alterna con una amplitud de 15 V y una frecuencia de 5 kHz, $R = 1$ kΩ, $C = 400$ nF y $L = 2$ mH. Determinar: (a) la amplitud de las intensidades que circulan por la resistencia, por la autoinducción y por el condensador, (b) la amplitud de la caida de tensión entre los puntos A y B, y (c) la impedancia compleja de salida del circuito para un instrumento que mida la caida de tensión entre los puntos A y B. [Solución: (a) $I_{R0} = 14.37$ mA, $I_{C0} = 53.92$ mA, $I_{L0} = 68.29$ mA; (b) $V_{AB0} = 4.291$ V; (c) $\tilde{Z}_{AB} = 81.86 + 274.1j\ \Omega$.]



5.6 En el circuito de la figura, la fuerza electromotriz aplicada es alterna con un valor eficaz de 12 V y una frecuencia f, y el amplificador es un operacional. Sabiendo que $R_1 = 1.2$ kΩ, se pide determinar R_2 y C de manera que la tensión de salida eficaz sea 12 V para f = 0 y 6 V para f = 1.5 kHz. [Solución: $R_2 = 1.2$ kΩ; $C = 0.1531\mu$F]



5.7 El circuito de la figura representa un circuito puente en el cual hay dos condensadores planos formados por tres armaduras planas y paralelas de las cuales la central puede moverse en dirección normal a su plano y está inicialmente centrada de manera que su distancia a las otras dos armaduras es x_0. Si la armadura se desplaza una cantidad Δx hacia la derecha, determinar la tensión alterna que aparece entre los puntos A y B. NOTA: La capacidad de un condensador plano es directamente proporcional al área de sus armaduras e inversamente proporcional a la distancia entre ellas. [Solución: $V_{AB} = V_{\text{excit}}\Delta x/2x_0$ en oposición de fase con la tensión de excitación.]