

Algorismes i Estructures de Dades 2 (AED2). 2007-08

1. Anàlisi amortitzada

1. Considera un tipus abstracte de dades (TAD) **pila** enriquit amb les operacions **extracció múltiple** i **inserció múltiple** implementades de manera que el seu cost és proporcional al nombre d'elements extrets o insertats. Quins serien els costos amortitzats de les quatre operacions? I en el cas que la operació inserció múltiple tinguera un cost constant?
2. El cost amortitzat de la operació afegir en un vector extensible que **dobla** la seua grandària es pot calcular si considerem seqüències d'operacions que acaben just després d'ampliar el vector. Si N és la talla inicial del vector, $m = N2^k + 1$ és la longitud de la seqüència d'operacions i $S(m)$ és el cost de tota la seqüència. Tenim aleshores que

$$S(N + 1) = S(N2^0 + 1) = N + (N + 1) \text{ (} N \text{ operacions barates i una cara)}$$

$$S(2N + 1) = S(N2^1 + 1) = N + N - 1 + (N + 1) + (2N + 1) \text{ (} 2N - 1 \text{ barates i dues cares)}$$

$$S(4N + 1) = S(N2^2 + 1) = N + N - 1 + 2N - 1 + (N + 1) + (2N + 1) + (4N + 1)$$

...

$$S(N2^k + 1) = N + \sum_{j=0}^{k-1} (N2^j - 1) + \sum_{j=0}^k (N2^j + 1)$$

D'on (recordant que $\sum_{j=0}^{k-1} 2^j = 2^k - 1$) s'obté

$$S(N2^k + 1) = 3N2^k - N + 1$$

i per al cost amortitzat:

$$T(N2^k + 1) = \frac{3N2^k - N + 1}{N2^k + 1} \leq 3$$

Calcula la mateixa expressió per als casos en què es **triplique** la grandària del vector o s'incrementa en un 50% de la grandària actual. Compara els dos casos amb el primer i digues en cada cas si millora o empitjora. (Suggeriment: pots generalitzar-ho al cas en què el vector s'incrementa en cada cas en un factor $\alpha > 1$. Els casos anteriors correspondrien a $\alpha = 2, 3, 1.5$).

(Suggeriment: Una versió més fàcil de l'exercici s'obté si es considera com a grandària inicial, $N = 1$)

3. Calcula el cost amortitzat de la operació afegir en un vector extensible de talla inicial N que extén la seua grandària en una quantitat N cada vegada que s'omple. Escriu expressions acurades en funció de N .
4. Considera la implementació d'una **cua** mitjançant **dues piles**. Suposem seqüències d'operacions formades per blocs de N operacions **encuar** seguides de N operacions **desencuar**. Quin seria el cost per operació en funció de N ? Considera ara la seqüència formada per blocs de $N, N - 1, N - 2, \dots, 1$ operacions encuar/desencuar. Quin seria el cost per operació en funció de N ?
Quin seria el tipus de seqüència d'operacions que donaria lloc al pitjor comportament possible? A quant eixiria el cost per operació en eixe cas?
5. Aplica el mètode del potencial per obtenir el cost amortitzat de la operació **afegir** en un vector extensible que dobla la seua grandària. Suggeriment: el cost de l'operació i -èssima es pot escriure com a (pot simplificar-ho fent $N = 1$):

$$c_i = \begin{cases} i & \text{si } i - 1 \text{ és } N \text{ per potència exacta de 2} \\ 1 & \text{si no} \end{cases}$$