7077 Teoria d'Autòmats i Llenguatges Formals II

Butlletí de Problemes

22 de maig de 2001

1 Màquines de Turing (MT)

Exercici 1.1 A partir de la definició formal d'un autòmat finit,A, trobeu una màquina de Turing equivalent, M. És a dir, donat $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ trobar una MT, M, tal que $L(M) = L(A)$.

Exercici 1.2 Repetiu l'exercici anterior amb la definició formal d'un autòmat a pila.

Exercici 1.3 Dissenyeu una MT amb una sola cinta que accepte el llenguatge $L = \{a^n b^n c^n | n \geq 0\}$.

Exercici 1.4 Dissenyeu una MT amb una sola cinta que accepte el llenguatge $L = \{w \in \{a,b\}^* : |w|_a = |w|_b\}$. Dissenyar una màquina amb dues cintes que accepte el mateix llenguatge.

Exercici 1.5 Dissenyeu una Màquina de Turing Modular (MTM) que accepte el llenguatge de l'exercici anterior.

Exercici 1.6 Dissenyeu una MT amb una sola cinta que, donat un número en binari a l'entrada, calcule el número binari següent.

Exercici 1.7 Dissenyeu una MTM amb una sola cinta amb alfabet d'entrada $\{a, b\}$ que calcule com a sortida el nombre de vegades (en codificació unària) que apareix el patró $''abb''$ en la cadena d'entrada. Exemple: $f_M(aaabbababbb) = 11$. Dissenyeu una MT equivalent que no siga modular amb una única cinta i dos capçals.

Exercici 1.8 Repetiu l'exercici anterior amb el patró "*ababa*" i tenint en compte que el patró pot aparéixer en possicions solapades. Exemple: $f_M(abababa) = 11$.

Exercici 1.9 Dissenyeu una MT o una MTM que calcule la inversa de la cadena d'entrada. És a dir, que compute $f_M(w) = w^{-1}$ per a qualsevol w de Σ^*.

Exercici 1.10 Dissenyeu una MT de qualsevol tipus que calcule la suma de dos enters escrits en binari.

Exercici 1.11 Dissenyeu una MT de qualsevol tipus que, donats dos enters n, m en unari ($n \leq m$), calcule el residu de la divisió entera entre n i m. La configuració de la màquina a l'inici i al final (localització de les cadenes d'entrada i sortida en una o diferents cintes, l'ús de separadors o no, etc.) és lliure però cal especificar-la.

2 Tipus de llenguatges acceptats per MT

Exercici 2.12 S'ha demostrat que la unió de dos llenguatges recursivament enumerables (r.e.) és r.e. Demostreu que la unió d'un nombre infinit de llenguatges r.e. també ho és.

Exercici 2.13 Siga M una MT que només para (i accepta) amb les cadenes de entrada de longitut parella. És $L(M)$ recursiu?

Exercici 2.14 Justifiqueu perquè el llenguatge $L = \{a^n | n \text{ és un nombre primer}\}$ és recursiu.

Exercici 2.15 Siga una operació P que, a partir de tota cadena w de $\Sigma = \{a, b\}^*$, elimina tots els símbols a de w quan la seua longitud és parella i elimina en canvi tots els símbols b de w si la seua longitud és senar. Demostreu que si $L \in \mathcal{L}_{re}$ aleshores $P(L) \in \mathcal{L}_{re}$, on l'operació P s'estén al cas de llenguatges de la forma habitual, $P(L) = \{P(w) | w \in L\}$.

Exercici 2.16 Siga l'operació $P : \Sigma^* \times \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ tal que donades w_1 i w_2 calcula $P(w_1, w_2) = a_1 a_2 \ldots a_{2n}$ si i solament si $w_1 = a_1 a_3 \ldots a_{2n-1}$ i $w_2 = a_2 a_4 \ldots a_{2n}$ (la funció no està definida en cap altre cas). La operació s'estén a llenguatges en la forma habitual. Demostreu que la classes $\mathcal{L}_{re}$ i $\mathcal{L}_{rec}$ són tancades respecte de l'operació P

Exercici 2.17 És tancada la classe dels llenguatges semi-decidibles (llenguatges r.e. que no són recursius) respecte de la complementació?

Exercici 2.18 És tancada la classe $\mathcal{L}_{re}$ respecte del quocient de llenguatges? ($L_1/L_2 = \{x \in \Sigma^* | \exists y \in L_2 \;\wedge\; xy \in L_1\}$)

Exercici 2.19 És tancada la classe $\mathcal{L}_{re}$ respecte dels homomorfismes inversos?

Exercici 2.20 Demostra que la classe $\mathcal{L}_{re}$ és tancada respecte del tancament o clausura de Kleene ($L \in \mathcal{L}_{re} \Rightarrow L^* \in \mathcal{L}_{re}$).

3 Resolubilitat

Exercici 3.21 És decidible el problema de determinar si una cadena w pertany o no a un determinat llenguatge de tipus 2?

Exercici 3.22 Demostreu (sense fer ús de teorema de Rice) la indecidibilitat del següent problema: ¿Conté un determinat llenguatge, $L \subseteq \{0,1\}^*$ la cadena "001"?

Exercici 3.23 Donada una MT i un dels seus estats, es pot resoldre el problema de saber si la màquina passa o no per aquest estat per a alguna cadena $w \in \Sigma^*$?

Exercici 3.24 Donades dues màquines M_1 i M_2, es pot decidir si $L(M_1) = L(M_2)$?

Exercici 3.25 Siga una màquina M amb alfabet de cinta Γ i un símbol $A \in \Gamma$. Es pot saber si M escriurà A en alguna posició de la seua cinta que inicialment està en blanc?

Exercici 3.26 És resoluble el problema de la correspondència de Post per al cas de $\Sigma = \{a\}$? Demostreu-ho.

Exercici 3.27 Donades dues MT, es pot saber si existeix alguna cadena per a la qual les dues màquines paren?

4 Funcions Recursives

Exercici 4.28 Escriviu el predicat "ser major o igual que" en termes de funcions recursives primitives ja definides.

Exercici 4.29 Escriviu la funció $i(x, y)$ que dóna el valor 1 si $x = y = 1$ o el valor 0 en qualsevol altre cas, en termes de funcions recursives primitives ja definides.

Exercici 4.30 Definiu la funció $pot(x, y) = x^y$ mijantçant recursivitat primitiva.

Exercici 4.31 Demostreu que la funció $div2(x) = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$ és recursiva primitiva.

Exercici 4.32 Definiu la funció $a(x) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$ mijantçant recursivitat primitiva i mijantçant minimalització.

Exercici 4.33 Definiu la funció $l(x, y) = \lfloor \log_x y \rfloor$ mijantçant recursivitat primitiva[1] i mijantçant minimalització.

[1]Inventa't un valor per a $y = 0$ en aquest cas.