Tema 5

La màquina de Turing

5.1 Definició de la màquina de Turing

Definició 5.1 *Una* **màquina de Turing** *(MT) és una estructura de la forma* $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \triangle, F)$ *on*

- Q és un conjunt (finit) d'estats.
- Σ és l'alfabet d'entrada.
- Γ és l'alfabet de cinta.
- $q_0 \in Q$ és l'estat inicial.
- $\triangle \in \Gamma$ ($\triangle \notin \Sigma$) és un símbol especial anomenat **símbol blanc**.
- $F \subseteq Q$ és el conjunt d'estats finals.
- $\delta : Q \times \Gamma \longrightarrow Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \rightarrow\}$ és una funció parcial que rep el nom de **funció de transició** de la MT.

$\square$

Una MT pot ser visualitzada (Figura 4.1) com un dispositiu amb una cinta infinita separada en (infinites) caselles en cada una de les quals es pot escriure (o llegir) un símbol de l'alfabet de cinta, Γ. Un capçal de lectura/escriptura pot moure's al llarg de la cinta governat per un control finit. En cada instant, la MT llegeix un símbol (el que es troba en la casella apuntada pel capçal). En funció de l'estat actual i del símbol llegit, la MT canvia a un altre estat, escriu un nou símbol en la mateixa posició i mou el capçal a una casella contigua (a dreta o a esquerra). Els símbols $\leftarrow$ i $\rightarrow$ no poden pertànyer a Γ i serveixen per indicar la direcció en què es mourà el capçal.

Una **transició** ve donada per un valor particular de la funció de transició i l'element del domini corresponent i s'escriu com a $\delta(q, x) = (q, y, D)$. Açò significa que si l'estat i símbols actuals són

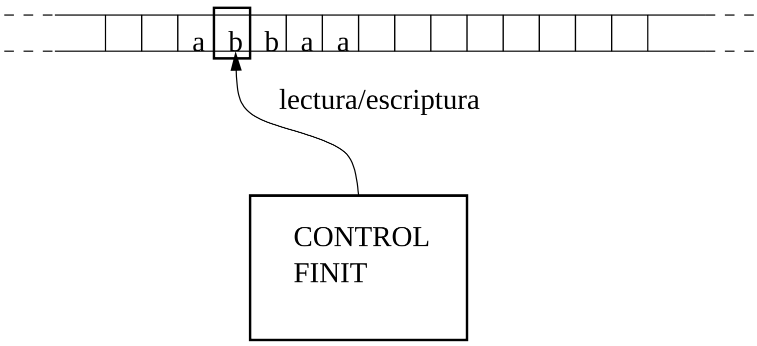


Figura 5.1. Representació d'una màquina de Turing.

q i x, respectivament, la màquina canviarà a l'estat p, escriurà y i es desplaçarà una posició en la direcció $D \in \{\leftarrow, \rightarrow\}$.

Heus ací un exemple de màquina de Turing:

Exemple 5.1 *Siga* $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \Sigma \cup \{X, Y, \triangle\}$ *i* $F = \{q_4\}$. *La màquina de Turing* $M_1 = \{Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \triangle, F\}$ *ve donada per les següents transicions:*

$$\begin{array}{lll}
\delta(q_0, 0) = (q_1, X, \rightarrow) & \delta(q_1, 0) = (q_1, 0, \rightarrow) & \delta(q_1, Y) = (q_1, Y, \rightarrow) \\
\delta(q_1, 1) = (q_2, Y, \leftarrow) & \delta(q_2, 0) = (q_2, 0, \leftarrow) & \delta(q_2, Y) = (q_2, Y, \leftarrow) \\
\delta(q_2, X) = (q_0, X, \rightarrow) & \delta(q_0, Y) = (q_3, Y, \rightarrow) & \delta(q_3, Y) = (q_3, Y, \rightarrow) \\
\delta(q_3, \triangle) = (q_4, \triangle, \rightarrow) & &
\end{array}$$

Aquesta mateixa informació es pot representar amb el que es coneix com a **taula de transició**:

	0	1	X	Y	$\triangle$
q_0	$(q_1, X, \rightarrow)$			$(q_3, Y, \rightarrow)$	
q_1	$(q_1, 0, \rightarrow)$	$(q_2, Y, \leftarrow)$		$(q_1, Y, \rightarrow)$	
q_2	$(q_2, 0, \leftarrow)$		$(q_0, X, \rightarrow)$	$(q_2, Y, \leftarrow)$	
q_3				$(q_3, Y, \rightarrow)$	$(q_4, \triangle, \rightarrow)$
q_4					

També, la mateixa informació es pot representar mijantçant l'anomenat **diagrama de transicions** de la MT que es mostra en la Figura 4.2.

$\square$

Definició 5.2 *Anomenem* **descripció instantània** *o* **configuració** *d'una MT en un instant donat, el parell format per l'estat actual i el contingut de la cinta*[1]

[1] O més concretament, al nombre (finit) de caselles de la cinta envoltades per un nombre infinit de caselles buides.

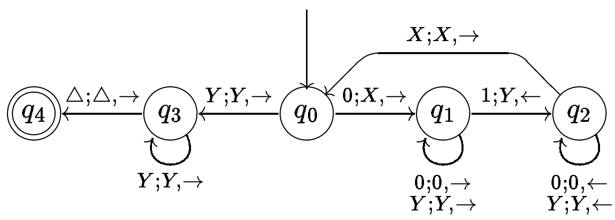


Figura 5.2. Diagrama de transicions de la màquina M_1.

Per exemple, la configuració inicial de la MT anterior per a acceptar la cadena 0011 vindria donada pel parell $(q_0, 0011)$. Després de la primera transició la configuració seria $(q_1, X011)$. En aquest manual se seguirà la norma de representar les configuracions de forma compacta com a una única cadena formada per tres parts: el contingut de la cinta a l'esquerra del capçal, l'estat actual (entés com a símbol) i el contingut de la cinta a la dreta de la posició del capçal (incloent aquesta). És a dir, les dues configuracions anteriors s'escriuran com a $q_0 0011$ i $Xq_1 011$, respectivament. □

Definició 5.3 *Anomenem computació simple el canvi de configuració deguda a l'aplicació d'una única transició en una màquina M. Utilitzarem el símbol $\vdash_M$. Anomenarem* **computació** *una successió de transicions simples des d'una configuració inicial fins a una configuració de parada.*

Per exemple, les dues configuracions anteriors formen la transició simple $q_0 0011 \vdash_{M_1} Xq_1 011$. El subíndex es podrà normalment suprimir si no condueix a confusió. Al mateix temps, la computació que condueix a l'acceptació de la cadena 0011 per la mateixa màquina seria (ja sense subíndex):

$$\begin{array}{llll} q_0 0011 \;\vdash & Xq_1 011 & \vdash\; X0q_1 11 \;\vdash\; Xq_2 0Y1 \;\vdash \\ \vdash\; q_2 X0Y1 \;\vdash & Xq_0 0Y1 & \vdash XXq_1 Y1 \vdash XXYq_1 1 \vdash \\ \vdash XXq_2 YY \vdash & Xq_2 XYY & \vdash XXq_0 YY \vdash XXYq_3 Y \vdash \\ \vdash XXYYq_3 \vdash XXYY \triangle q_4 & & \end{array}$$

que es pot escriure de forma resumida com a

$$q_0 0011 \vdash^* XXYY \triangle q_4$$

Un altre exemple de computació per a la mateixa màquina seria

$$q_0 00 \vdash^* X0q_1$$

En aquest cas, tot i que no s'arriba a cap estat final la màquina acaba en una configuració de parada ja que des de l'estat q_1 sent $\triangle$ el símbol actual no hi ha cap transició definida.

Si una determinada MT, M, a partir d'una certa configuració inicial, $q_0 w$, no arriba mai a una configuració de parada s'escriurà com a:

$$q_0 w \vdash^*_M \infty$$

$\square$

5.1.1 La màquina de Turing com a acceptor de llenguatges

Definició 5.4 *Donada una MT, $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \triangle, F)$, es defineix el llenguatge acceptat per la màquina M com a*

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid q_0 w \vdash_M^* \alpha_1 p \alpha_2,\ p \in F, \alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma^*\}$$

$\square$

Per exemple, donada la màquina M_1 de l'exemple anterior es compleix que

$$L(M_1) = \{0^n 1^n \mid n \geq 1.\}$$

5.1.2 La màquina de Turing com a model de computació

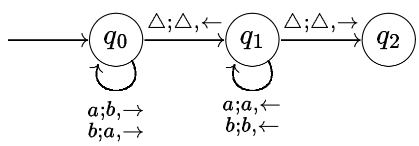
La MT també es pot veure com un dispositiu que, donada una cadena de Σ^*, calcula una altra cadena de Γ^*. En altres paraules, una màquina M, calcula o computa una certa funció, $f_M : \Sigma^* \longrightarrow \Gamma^*$, que vindrà donada per a tot $w \in \Sigma^*$ com a[2]

$$f_M(w) = \begin{cases} x & \text{si } \exists x \in \Gamma^* : q_0 x \vdash_M^* qx \\ \text{indefinit} & \text{si no} \end{cases}$$

on qx és una configuració de parada.

Per exemple, la màquina M donada per

	a	b	$\triangle$
q_0	$(q_0, b, \rightarrow)$	$(q_0, a, \rightarrow)$	$(q_1, \triangle, \leftarrow)$
q_1	$(q_1, a, \leftarrow)$	$(q_1, b, \leftarrow)$	$(q_2, \triangle, \rightarrow)$



calcula la funció $f_M(w) = h(w)$ on h és un homomorfisme donat per $h(a) = b$ i $h(b) = a$. És a dir, la màquina M calcula una cadena on els símbols a es canvien per b i al revés per a tota cadena de $\{a, b\}^*$.

[2]En aquesta definició estem implícitament suposant que la màquina sempre calcula una certa cadena com a resultat i situa el capçal sobre el primer símbol d'aquesta cadena la qual cosa no suposa cap pèrdua de generalitat.

5.2 Altres tipus de màquines de Turing

Existeixen altres definicions de la MT encara que totes elles són absolutament equivalents quant a les seues capacitats tant per a acceptar llenguatges com per a computar funcions. No obstant això, comentarem algunes definicions alternatives i profunditzarem en algunes d'elles pel seu interés a l'hora de resoldre determinats problemes.

En primer lloc, podem estendre la gama de moviments del capçal d'una MT amb el moviment nul, que representarem com a $\bullet$. Així, quan interesse, la funció de transició estarà definida com a

$$\delta : Q \times \Gamma \longrightarrow Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \bullet, \rightarrow\}$$

És fàcil demostrar que açò no altera en cap cas la capacitat de la MT per a computar o per a acceptar llenguatges. O, en altres paraules, qualsevol MT amb moviments nuls pot ser simulada per una MT "normal" i al revés.

5.2.1 Màquines de Turing amb cinta semi-infinita

5.2.2 La màquina de Turing multipista i multicinta

La **màquina de Turing multipista** amb k pistes és una MT el capçal de la qual pot llegir i escriure k símbols en una sola operació.

La funció de transició corresponent estarà definida com a

$$\delta : Q \times \Gamma^k \longrightarrow Q \times \Gamma^k \times \{\leftarrow, \bullet, \rightarrow\}$$

L'única diferència és que aquesta màquina treballa amb k-tuples de símbols. Per tant, és molt fàcil demostrar l'equivalència d'una màquina M_k amb k pistes i una màquina M_1 amb una sola pista que treballe amb un alfabet de cinta estés en el qual els símbols de M_k són k-tuples de símbols de M_1. En la Figura 4.3 es mostra la representació gràfica d'una MT amb 3 pistes.

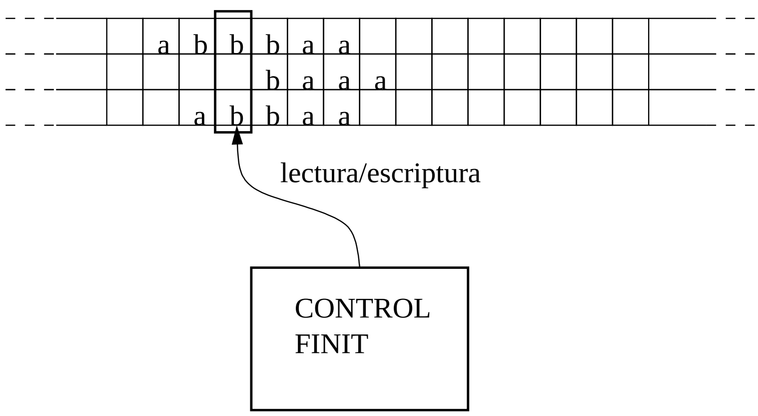


Figura 5.3. Una màquina de Turing multipista amb $k = 3$.

La **màquina de Turing multicinta** amb k cintes és una MT que té k cintes cadascuna amb el seu capçal capaç de moure's independentment dels altres. Ara, la funció de transició seria

$$\delta : Q \times \Gamma^k \longrightarrow Q \times \Gamma^k \times \{\leftarrow, \bullet, \rightarrow\}^k$$

Aquesta MT si que és significativament diferent de les anteriors ja que, a més a més de treballar amb k-tuples de símbols, el fet que els capçals es moguen de forma independent fa que l'equivalència amb les altres màquines no siga trivial. A la Figura 4.4 es mostra la representació gràfica d'una MT amb 3 cintes.

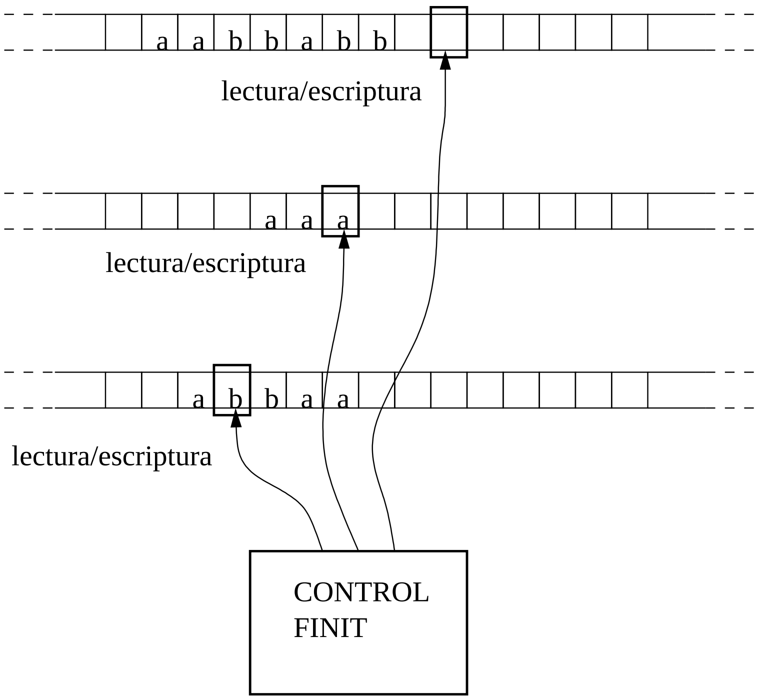


Figura 5.4. Una màquina de Turing multicinta amb $k = 3$.

Una altra variació d'aquesta última MT és la **màquina de Turing multicapçal**, que és una MT amb una sola cinta però amb k capçals que es poden moure de forma independent sobre l'única cinta. En aquest cas la forma de la funció de transició és exactament la mateixa i, a més a més, cal establir una prioritat entre els capçals per preveure la possibilitat que més d'un capçal escriga en una mateixa casella. Aquest tipus de MT es representa gràficament en la Figura 4.5.

5.3 Classes de llenguatges relacionades amb màquines de Turing

5.3.1 Llenguatges acceptats i generats per màquines de Turing

Definició 5.5 *Un llenguatge L és* **recursivament enumerable** *(r.e.) si és acceptat per alguna*

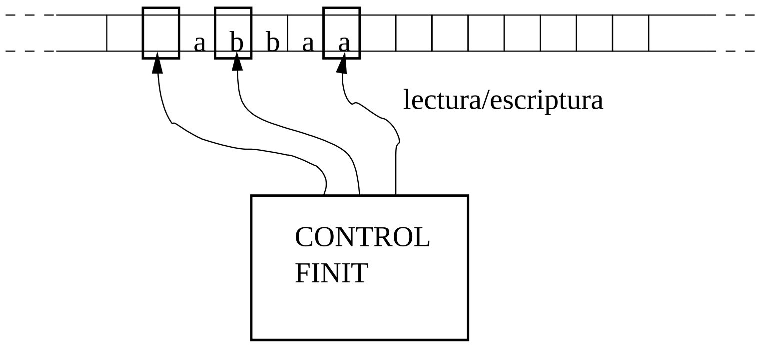


Figura 5.5. Una màquina de Turing multicapçal amb $k = 3$.

màquina de Turing. És a dir, si $\exists\ M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \triangle, F)$ *tal que* $L = L(M)$.

□

Definició 5.6 *Un llenguatge és* **recursiu** *si és recursivament enumerable i la màquina que l'accepta arriba a una configuració de parada per a tota cadena sobre l'alfabet d'entrada. És a dir, si* $\exists\ M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \triangle, F)$ *tal que* $L = L(M)$ *i, a més a més,* $q_0 w \vdash_M^* \alpha_1 q \alpha_2\ \forall w \in \Sigma^*$, *on* $\alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma^*$ *i* $q \in Q$.

□

Anomenarem $\mathcal{L}_{re}$ i $\mathcal{L}_{rec}$ les classes de llenguatges recursivament enumerables i recursius, respectivament. Com a conseqüència de les definicions, es compleix trivialment que $\mathcal{L}_{rec} \subseteq \mathcal{L}_{re}$ i també es compleix la següent proposició:

Teorema 5.1 Si $L \in \mathcal{L}_{re}$ i $\bar{L} \in \mathcal{L}_{re}$ aleshores $L \in \mathcal{L}_{rec}$.
La demostració es basa en què es pot construir una màquina que simule al mateix temps les màquines que accepten L i el seu complementari. Aquesta màquina pararia quan una de les dues parara. Per tant, pararia per a tota cadena d'entrada. □

Es compleix que la classe dels llenguatges recursius, $\mathcal{L}_{rec}$, és tancada respecte de la unió, intersecció i complement. En canvi, la classe dels llenguatges recursivament enumerables, $\mathcal{L}_{re}$, és tancada només respecte de la unió i la intersecció.

Com a conseqüència que $\mathcal{L}_{rec}$ és tancada respecte de la intersecció mentre que $\mathcal{L}_I$ (la classe dels llenguatges incontextuals) no ho és, es compleix el següent corol·lari:
Corol·lari $\mathcal{L}_I$ està inclosa pròpiament en $\mathcal{L}_{rec}$. És a dir $\mathcal{L}_I \subset \mathcal{L}_{rec}$

Definició 5.7 *Diem que un llenguatge, L, és* **enumerat** *per una MT si n'existeix alguna amb almenys una cinta de sortida en la qual la MT escriu* totes *les cadenes de L separades per blancs. Ho escriurem com a* $L = G(M)$.
Si la màquina M és capaç d'escriure les cadenes de L en ordre lexicogràfic direm que L és **enumerat en ordre canònic** i ho escriurem com a $L = G_c(M)$. □

Teorema 5.2 $L \in \mathcal{L}_{re} \Leftrightarrow \exists M : L = G(M)$

$\square$

Teorema 5.3 $L \in \mathcal{L}_{rec} \Leftrightarrow \exists M : L = G_c(M)$

$\square$

5.3.2 La màquina de Turing i la jerarquia de Chomsky

Es pot demostrar molt fàcilment que els llenguatges regulars i incontextuals són llenguatges recursius ja que tant els autòmats finits com els autòmats a pila es poden simular mijantçant màquines de Turing que recorren una única vegada la cadena d'entrada i sempre paren. Per tant,

$$\mathcal{L}_R \subset \mathcal{L}_I \subset \mathcal{L}_{rec}$$

Teorema 5.4 Si $L \in \mathcal{L}_0 \Leftrightarrow L \in \mathcal{L}_{re}$

$\square$

Teorema 5.5 Si $L \in \mathcal{L}_C \Rightarrow L \in \mathcal{L}_{rec}$

$\square$

Lamentablement la implicació contraria a la de l'últim teorema no és certa. Per tant, la relació dels llenguatges acceptats per MT amb la jerarquia de Chomsky es pot resumir com a

$$\mathcal{L}_R \subset \mathcal{L}_I \subset \mathcal{L}_C \subset \mathcal{L}_{rec} \subset \mathcal{L}_{re} = \mathcal{L}_0$$

Açò mateix es mostra gràficament en la Figura 4.6.

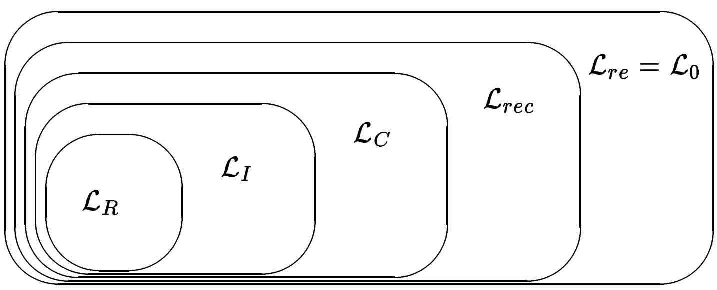


Figura 5.6. Relació entre les diferents classes de llenguatges.

5.4 Exercicis

Exercici 5.1 A partir de la definició formal d'un autòmat finit, A, trobeu una màquina de Turing equivalent, M. És a dir, donat $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ trobeu una MT, M, tal que $L(M) = L(A)$.

Exercici 5.2 Repetiu l'exercici anterior amb la definició formal d'un autòmat amb pila.

Exercici 5.3 Dissenyeu una MT amb una sola cinta que accepte el llenguatge $L = \{a^n b^n c^n | n \geq 0\}$.

Exercici 5.4 Dissenyeu una MT amb una sola cinta que accepte el llenguatge $L = \{w \in \{a,b\}^* : |w|_a = |w|_b\}$. Dissenyeu una màquina amb dues cintes que accepte el mateix llenguatge.

Exercici 5.5 Dissenyeu una Màquina de Turing Modular (MTM) que accepte el llenguatge de l'exercici anterior.

Exercici 5.6 Dissenyeu una MT amb una sola cinta que, donat un número en binari a l'entrada, calcule el número binari següent.

Exercici 5.7 Dissenyeu una MTM amb una sola cinta amb alfabet d'entrada $\{a, b\}$ que calcule com a sortida el nombre de vegades (en codificació unària) que apareix el patró "*abb*" en la cadena d'entrada. Exemple: $f_M(aaabbababbb) = 11$. Dissenyeu una MT equivalent que no siga modular amb una única cinta i dos capçals.

Exercici 5.8 Repetiu l'exercici anterior amb el patró "*ababa*" i tenint en compte que el patró pot aparéixer en posicions solapades. Exemple: $f_M(abababa) = 11$.

Exercici 5.9 Dissenyeu una MT o una MTM que calcule la inversa de la cadena d'entrada. És a dir, que compute $f_M(w) = w^{-1}$ per a qualsevol w de Σ^*.

Exercici 5.10 Dissenyeu una MT de qualsevol tipus que calcule la suma de dos enters escrits en binari.

Exercici 5.11 Dissenyeu una MT de qualsevol tipus que, donats dos enters n, m en unari ($n \leq m$), calcule el residu de la divisió entera entre n i m. La configuració de la màquina a l'inici i al final (localització de les cadenes d'entrada i sortida en una o diferents cintes, l'ús de separadors o no, etc.) és lliure però cal que l'especifiqueu.