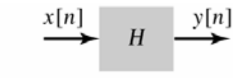
CAPITULO 7.-
LA TRANSFORMADA z.

7.1 Introducción.

Generalizamos la representación senoidal compleja de la DTFT
Caracterización más amplia de sistemas y su interacción con señales
*señales no absolutamente sumables
(ej. : respuesta impulso de un sistema inestable)
Propiedades
Función de transferencia
Estudio de las características de sistemas
Obtención de estructuras de programación para implementar sistemas en tiempo discreto en computadoras

7.2 La transformada z.



(b)

$$z = re^{j\Omega}$$

$$x[n] = z^n = r^n\cos(\Omega n) + jr^n sen(\Omega n)$$

$$y[n] = H\{x[n]\} = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{n-k} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}\right)z^n = H(z)z^n \Rightarrow H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}$$

$H\{z^n\} = H(z)z^n$: *relación característica*

z^n : *función catacterística* ; $H(z)$: *valor catacterístico*

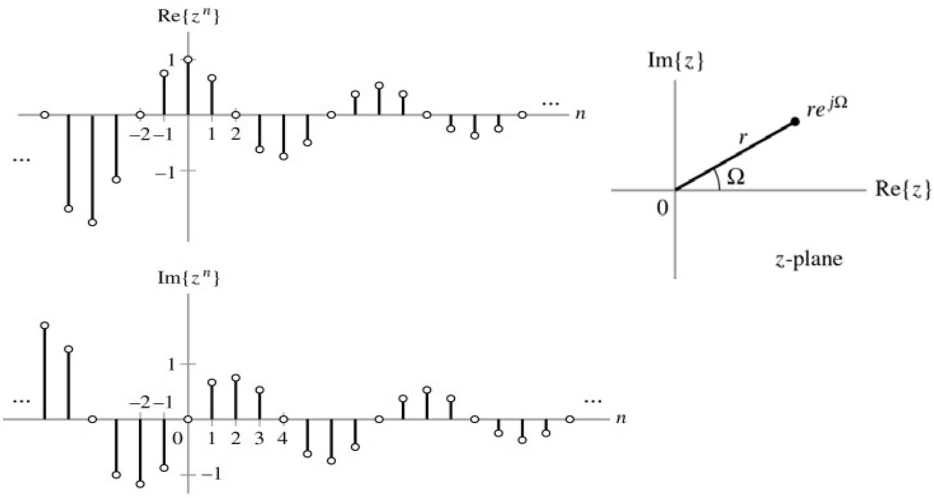
$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} = |H(z)|e^{j\phi(z)}$$

$$y[n] = |H(z)|e^{j\phi(z)}z^n = |H(z)|e^{j\phi(z)}r^n e^{j\Omega n}$$

$$y[n] = |H(re^{j\Omega})|r^n\cos\left(\Omega n + \phi(re^{j\Omega})\right) + j|H(z)|r^n sen\left(\Omega n + \phi(re^{j\Omega})\right)$$

Figure 7.1 (p. 554)

Real and imaginary parts of the signal z^n.



7.2a cont.

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]z^{-n}$$

$$z=re^{j\Omega}$$

$$H(re^{j\Omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n](re^{j\Omega})^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[h[n]r^{-n}\right]e^{-j\Omega n}$$

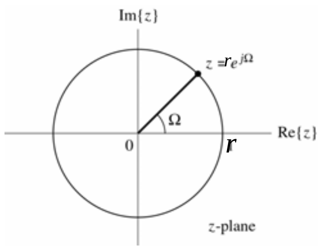
$$h[n]r^{-n}\xleftrightarrow{DTFT}H(re^{j\Omega})$$

$$h[n]r^{-n}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H(re^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega$$

$$h[n]=\frac{r^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H(re^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H(re^{j\Omega})(re^{j\Omega})^n d\Omega$$

$$dz=jre^{j\Omega}d\Omega=jz\,d\Omega \quad ; \quad |z|=r$$

$$h[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint H(z)z^{n-1}dz$$



Tiempo	Periódica (t,n)	No periódica (t,n)	
Continua (t)	**FS** $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X[k]e^{jk\omega_0 t}$ $X[k]=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$ x(t) periodo T $\Rightarrow \omega_0=2\pi/T$	**FT** $x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$ $X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$	**No periódica (k,ω)**
Discreta [n]	**DTFS** $x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle}X[k]e^{jk\Omega_0 n}$ $X[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}x[n]e^{-jk\Omega_0 n}$ x[n] y X[k] periodo N $\Rightarrow \Omega_0=\frac{2\pi}{N}$	**DTFT** $x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega$ $X(e^{j\Omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\Omega n}$ $X(e^{j\Omega})$ tiene periodo 2π	**Periódica (k,Ω)**
	Discreta (k)	**Continua (ω,Ω)**	**Frecu-encia**

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \quad \xrightarrow{r=1} \quad X(e^{j\Omega}) = X(z)\big|_{z=e^{j\Omega}} \quad DTFT$$

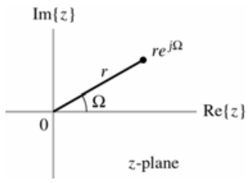
7.2b cont.

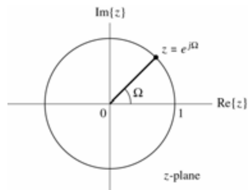
$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz$$

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z)$$

$$\left| x[n] z^{-n} \right| = \left| x[n] r^{-n} \right|$$

$$condición\ necesaria \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x[n] r^{-n} \right| \xrightarrow{r} ROC$$

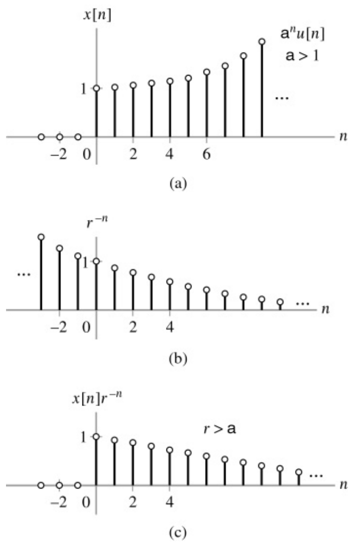




$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}} = \frac{b_0 \prod_{k=1}^{M} (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N} (1 - d_k z^{-1})}$$

$a = \alpha$

Figure 7.2 (p. 556)
Illustration of a signal that has a *z*-transform, but does not have a DTFT.
(a) An increasing exponential signal for which the DTFT does not exist.
(b) The attenuating factor r^{-n} associated with the *z*-transform. (c) The modified signal $x[n]r^{-n}$ is absolutely summable, provided that $r > \alpha$, and thus the *z*-transform of $x[n]$ exists.

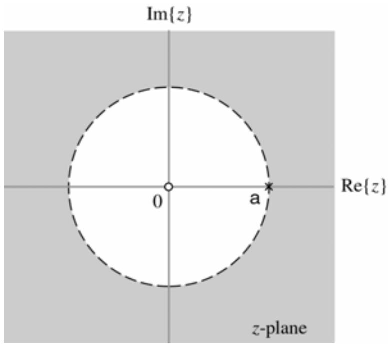


Ejemplo 7.2

Determine la transformada z de la señal : $x[n]=\alpha^n u[n]$
Describa las ubicaciones de la ROC y los polos y ceros de X(z) en el plano z

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n u[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{z}\right)^n=$$

$$|z|>|\alpha| \Rightarrow X(z)=\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}=\frac{z}{z-\alpha}$$



$a=\alpha$

Ejemplo 7.3

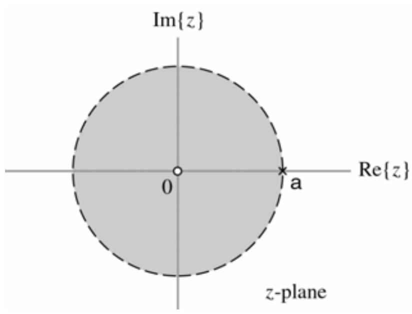
Determine la transformada z de la señal : $x[n]=-\alpha^n u[-n-1]$
Describa las ubicaciones de la ROC y los polos y ceros de X(z) en el plano z

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}=-\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n u[-n-1]z^{-n}=-\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{\alpha}{z}\right)^n$$

$$k=-n$$

$$X(z)=-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z}{\alpha}\right)^k=1-\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\alpha}\right)^k$$

$$|z|<|\alpha| \Rightarrow X(z)=1-\frac{1}{1-z\alpha^{-1}}=\frac{z}{z-\alpha}$$

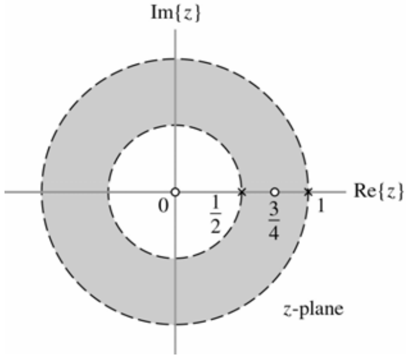


$a=\alpha$

Problema 7.1

Determine la transformada z de la señal : $x[n] = -u[-n-1] + (1/2)^n u[n]$
Describa las ubicaciones de la ROC y los polos y ceros de X(z) en el plano z

$$X(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{z}{z-1} = \frac{z\left(2z-\frac{3}{2}\right)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-1)} \quad , \quad \frac{1}{2} < z < 1$$



7.3 Propiedades de la región de convergencia

La ROC se relaciona con las características de una señal z[n] en el dominio del tiempo, se utiliza para encontrar transformadas inversas.
La ROC no pede contener ningún polo.

La ROC para una señal de duración finita incluye el plano z completo, excepto posiblemente z=0 y/o $|z| = \infty$
Supongamos que x[n] no es cero únicamente en el intervalo

$$n_1 \le n \le n_2 \quad \Rightarrow \quad X(z) = \sum_{n=n_1}^{n=n_2} x[n] z^{-n}$$

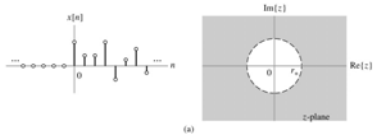
La única señal cuya ROC es el plano z es : $x[n] = c\,\delta[n]$

7.3 Propiedades de la región de convergencia

Señales de duración infinita y acotadas

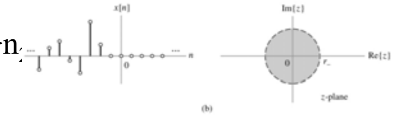
Señal **lateral derecha** : x[n]=0 para $n< n_1$

La ROC es de la forma $|z|>r_+$



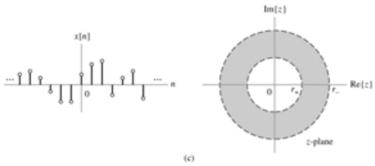
Señal **lateral izquierda** : x[n]=0 para $n>n_1$

La ROC es de la forma $|z|<r_-$



Señal **bilateral**

La ROC es de la forma $r_+<|z|<r_-$



7.4 Propiedades de la transformada z

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z) \quad con\ ROC\ R_x \quad ; \quad y[n] \xleftrightarrow{z} Y(z) \quad con\ ROC\ R_y$$

LINEALIDAD

$$a x[n] + b y[n] \xleftrightarrow{z} a X(z) + bY(z) \quad con\ ROC\ al\ menos\ \ R_x \bigcap R_y$$

INVERSIÓN EN EL TIEMPO $\quad x[-n] \xleftrightarrow{z} X\left(\frac{1}{z}\right) \quad con\ ROC\ \ \frac{1}{R_x}$

CORRIMIENTO EN EL TIEMPO

$$x[n-n_0] \xleftrightarrow{z} z^{-n_0} X(z),\ con\ ROC\ R_x\ excepto\ posiblemente\ para\ z=0, |z|=\infty$$

MULTIPLICACIÓN POR SECUENCIA EXPONENCIAL

$$\alpha^n x[n] \xleftrightarrow{z} X\left(\frac{z}{\alpha}\right) \quad con\ ROC \quad |\alpha| R_x$$

CONVOLUCIÓN

$$x[n] * y[n] \xleftrightarrow{z} X(z)Y(z) \quad con\ ROC\ al\ menos \quad R_x \bigcap R_y$$

DIFERENCIACIÓN EN EL DOMINIO DE Z

$$n x[n] \xleftrightarrow{z} -z \frac{d}{dz} X(z) \quad con\ ROC\ R_x$$

Transformadas de z básicas (1)

Señal	Transformada	ROC
$x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz$	$X[z]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}$	
$\delta[n]$	1	Toda z
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\|>1$
$\alpha^n u[n]$	$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$\|z\|>\|\alpha\|$
$n\alpha^n u[n]$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$\|z\|>\|\alpha\|$
$[\cos(\Omega_1 n)]u[n]$	$\frac{1-z^{-1}\cos\Omega_1}{1-z^{-1}2\cos\Omega_1+z^{-2}}$	$\|z\|>1$
$[sen(\Omega_1 n)]u[n]$	$\frac{z^{-1}sen\Omega_1}{1-z^{-1}2\cos\Omega_1+z^{-2}}$	$\|z\|>1$
$[r^n\cos(\Omega_1 n)]u[n]$	$\frac{1-z^{-1}r\cos\Omega_1}{1-z^{-1}2r\cos\Omega_1+r^2z^{-2}}$	$\|z\|>r$
$[r^n sen(\Omega_1 n)]u[n]$	$\frac{z^{-1}r\,sen\Omega_1}{1-z^{-1}2r\cos\Omega_1+r^2z^{-2}}$	$\|z\|>r$

Transformadas bilaterales para señales que son distintas de cero para n<0

Señal	Transformada bilateral	ROC
$u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\|<1$
$-\alpha^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$\|z\|<\|\alpha\|$
$-n\alpha^n u[-n-1]$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$\|z\|<\|\alpha\|$

Propiedades de la transformada z

Señal	Transformada unilateral	Transformada bilateral	ROC
x[n]	X(z)	X(z)	R_x
y[n]	Y(z)	Y(z)	R_y
ax[n]+by[n]	aX(z)+bY(z)	aX(z)+bY(z)	*al menos* $R_x \cap R_y$
x[n-k]	vea abajo	$z^{-k}X(z)$	R_x excepto posibl.para |z|=0,inf.
α^nx[n]	X(z/α)	X(z/α)	$\|\alpha\| R_x$
x[-n]	no	X(1/z)	1/ R_x
x[n]*y[n]	X(z)Y(z)	X(z)Y(z)	*al menos* $R_x \cap R_y$
nx[n]	$-z\frac{d}{dz}X(z)$	$-z\frac{d}{dz}X(z)$	R_x excepto posibl. En la suma o eliminación de z=0

Propiedades de corrimiento en el tiempo de la transformada z unilateral

$$x[n-k] \xleftrightarrow{z_u} x[-k]+x[-k+1]z^{-1}+\cdots+x[-1]z^{-k+1}+\mathbf{z^{-k}X(z)}, \forall k>0$$

$$x[n-k] \xleftrightarrow{z_u} -x[0]z^{k}-x[1]z^{k-1}-\cdots-x[k-1]z+\mathbf{z^{k}X(z)}, \forall k>0$$

7.5 Inversión de la transformada z

7.5.1 EXPANSIONES EN FRACCIONES SIMPLES

$$X(z)=\frac{A(z)}{B(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\ldots+b_Mz^{-M}}{1+a_1z^{-1}+\ldots+a_Nz^{-N}}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\ldots+b_Mz^{-M}}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_kz^{-1})} \quad ,M<N$$

$$X(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-d_kz^{-1}} \quad ; \quad A_k(d_k)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{A_k}{1-d_kz^{-1}} \; con\ ROC\,|z|>d_k$$

$$-A_k(d_k)^n u[-n-1] \xleftrightarrow{z} \frac{A_k}{1-d_kz^{-1}} \; con\ ROC\,|z|<d_k$$

$$d_i : r\ veces \Rightarrow \frac{A_{i_1}}{1-d_iz^{-1}}, \frac{A_{i_1}}{(1-d_iz^{-1})^2}, \ldots, \frac{A_{i_1}}{(1-d_iz^{-1})^r}$$

$$A\frac{(n+1)\ldots(n+m-1)}{(m-1)!}(d_i)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{A}{(1-d_iz^{-1})^m} \; con\ ROC\,|z|>d_i$$

$$-A\frac{(n+1)\ldots(n+m-1)}{(m-1)!}(d_i)^n u[-n-1] \xleftrightarrow{z} \frac{A}{(1-d_iz^{-1})^m} \; con\ ROC\,|z|<d_i$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

7.5a cont.

La relación entre la ROC asociada con X(z) y cada polo determina si la transformada inversa lateral derecha o la lateral izquierda se eligen para cada término.
La propiedad de linealidad indica que la ROC de X(z) es la intersección de las ROC asociadas con los términos individuales en la expansión en fracciones parciales.
Comparamos la localización de cada polo con la ROC de X(z).

7.5b cont.

7.5.2 EXPANSIONES EN SERIE DE POTENCIAS

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

ROC |z|>a $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$ señal lateral derecha

ROC |z|<a $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] (z^{-1})^{-n}$ señal lateral izquierda

Método división larga: cuando X(z) sea un cociente de polinomios

Problema 7.24

Utilice el método de la expansión en fracciones simples para calcular la inversa de la siguiente transformada z :

$$X(z)=\frac{z^2-3z}{z^2+\frac{3}{2}z-1} \quad ; \quad \frac{1}{2}<|z|<2$$

$$X(z)=\frac{z^2-3z}{z^2+\frac{3}{2}z-1}=\frac{1-3z^{-1}}{1+\frac{3}{2}z^{-1}-z^{-2}}=\frac{A}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{B}{1+2z^{-1}}$$

$$\left.\begin{aligned}1&=A+B\\-3&=2A-\frac{1}{2}B\end{aligned}\right\} \quad A=-1 \quad , \quad B=2$$

$$X(z)=\frac{-1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{2}{1+2z^{-1}}$$

$$x[n]=-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-2(-2)^n u[-n-1]$$

Problema 7.28

Utilice la expansión en serie de potencias para calcular la inversa de la siguiente transformada z :

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-2}} \quad ; \quad |z|>\tfrac{1}{2}$$

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}z^{-2}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k z^{-2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} z^{-2k}\overset{n=2k}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\delta[n-2k]\right]z^{-n}$$

$$x[n]=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\delta[n-2k]=\begin{cases}(1/2)^n & ,si\ n\ par\ y\ n>0\\ 0 & ,si\ n\ impar\end{cases}$$

Problema 7.28b

Utilice el método de la expansión en fracciones simples para calcular la inversa de la siguiente transformada z :

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-2}} \quad ; \quad |z|>\tfrac{1}{2}$$

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}=\frac{A}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{B}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{(A+B)+\frac{1}{2}(B-A)z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=1 \\ B-A=0 \end{array}\right\} A=B=\frac{1}{2} \Rightarrow \quad X(z)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right]$$

$$x[n]=\frac{1}{2}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]u[n]=\begin{cases}(1/2)^{n} & ,si\ n\ par\ y\ n>0 \\ 0 & ,si\ n\ impar\end{cases}$$

7.6 Análisis mediante transformadas de sistemas LTI

Examinaremos la relación entre función de transferencia y las Características entrada-salida de sistemas LTI en tiempo discreto.

$$y[n]=h[n]*x[n] \quad \Rightarrow \quad Y(z)=H(z)X(z) \quad ; \quad H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

* Relación entre la función de transferencia y la ecuación en diferencias

$$\sum_{k=0}^{N}a_k y[n-k]=\sum_{k=0}^{M}b_k x[n-k] \quad \stackrel{z}{\longleftrightarrow} \quad \sum_{k=0}^{N}a_k z^{-k}Y(z)=\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k}X(z)$$

$$Y(z)\sum_{k=0}^{N}a_k z^{-k}=X(z)\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k} \quad \Rightarrow \quad H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N}a_k z^{-k}}$$

Función de transferencia racional

7.6a cont.

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}=\frac{\tilde{b}\prod_{k=1}^{M}(1-c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_k z^{-1})} \quad ; \quad \tilde{b}=\frac{b_0}{a_0} : \textit{factor de ganancia}$$

$$\left.\begin{array}{l} si \quad b_0=b_1=\cdots=b_{p-1}=0 \quad \Rightarrow polo\ de\ orden\ p-ésimo\ en\ z=0 \\ si \quad a_0=a_1=\cdots=a_{l-1}=0 \quad \Rightarrow cero\ de\ orden\ l-ésimo\ en\ z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$H(z)=\frac{\tilde{b}z^{-p}\prod_{k=1}^{M-p}(1-c_k z^{-1})}{z^{-l}\prod_{k=1}^{N-l}(1-d_k z^{-1})} \quad ; \quad \tilde{b}=\frac{b_p}{a_l}$$

$$h[n] \xleftrightarrow{z} X(z)$$

Debemos conocer la ROC para calcular h[n].
La ecuación en diferencias no brinda información de la ROC

Deberán conocerse otras características del sistema : la estabilidad o la causalidad

7.6b cont.

•Relación de la función de transferencia y la descripción en variables de estado

$$\begin{array}{l} \mathbf{q}[n+1]=\mathbf{A}\mathbf{q}[n]+\mathbf{b}x[n] \\ y[n]=\mathbf{c}\mathbf{q}[n]+Dx[n] \end{array} \quad ; \quad \mathbf{q}(t)=\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_N(t) \end{bmatrix} \xleftrightarrow{z} \tilde{\mathbf{q}}(z)=\begin{bmatrix} Q_1(z) \\ Q_2(z) \\ \vdots \\ Q_N(z) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}[n+1]=\mathbf{A}\mathbf{q}[n]+\mathbf{b}x[n] \xleftrightarrow{z} z\tilde{\mathbf{q}}(z)-\mathbf{A}\tilde{\mathbf{q}}(z)=\mathbf{b}X(z)$$

$$(z\mathbf{I}-\mathbf{A})\tilde{\mathbf{q}}(z)=\mathbf{b}X(z)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}(z)=(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}X(z)$$

$$y[n]=\mathbf{c}\mathbf{q}[n]+Dx[n] \xleftrightarrow{z} Y(z)=\mathbf{c}\tilde{\mathbf{q}}(z)+DX(z)$$

$$Y(z)=\left[\mathbf{c}(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}+d\right]X(z)=H(z)X(z)$$

$$H(z)=\mathbf{c}(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}+d$$

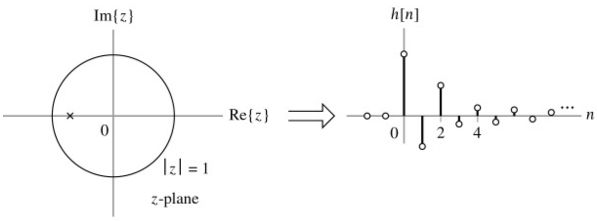
La función de transferencia es invariante para una transformación del vector de estado del sistema.

7.6c cont.

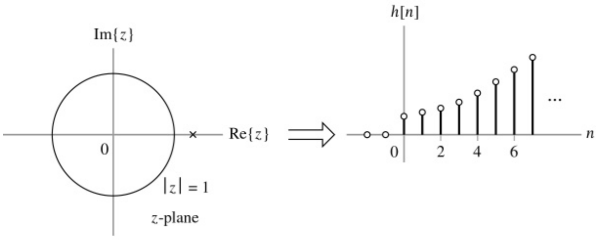
•Estabilidad y causalidad

CAUSAL $\Rightarrow h[n]=0 \quad \forall n<0$

$h[n] \xleftrightarrow{z} H(z) \quad \Rightarrow \quad h[n]: \textit{tranformadas inversas laterales derechas}$



(a)

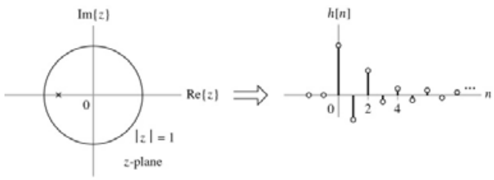


(b)

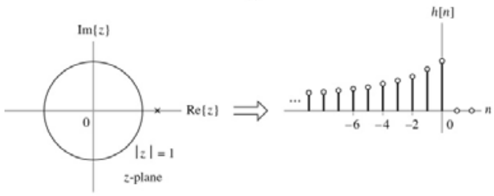
7.6d cont.

ESTABLE

h[n] es absolutamente sumable y existe su DTFT.
La ROC debe incluir el circulo de unitario en el plano z
Un polo dentro del circulo unitario aporta a la respuesta al impulso un término lateral derecho que decae exponencialmente.
Un polo fuera del circulo unitario aporta a la respuesta al impulso un término lateral izquierdo que decae exponencialmente.



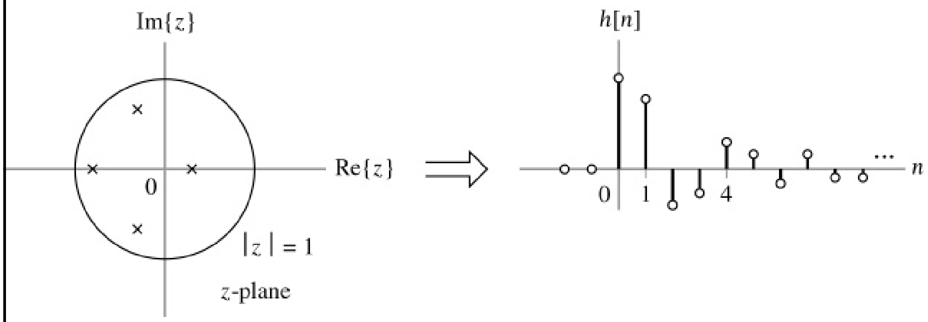
(a)



(b)

7.6e cont.

Sistemas **ESTABLES Y CAUSALES**
Deben tener sus polos dentro del circulo unitario.
Dichos polos aportan términos exponenciales decrecientes laterales derecho o causales a la respuesta al impulso.



7.6f cont.

•Sistemas inversos

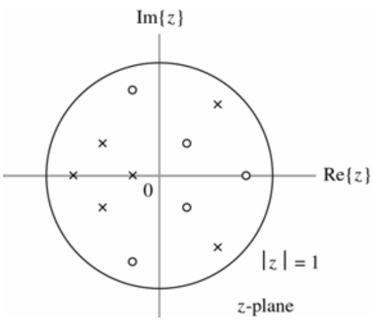
$$y[n] = h[n] * x[n] \quad \Rightarrow \quad Y(z) = H(z)X(z)$$

$$x[n] = h^{-1}[n] * y[n] \quad \Rightarrow \quad X(z) = H^{-1}(z)Y(z)$$

$$h^{-1}[n] * h[n] = \delta[n] \quad \Rightarrow \quad H^{-1}(z)H(z) = 1$$

$$H^{-1}(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}} = \frac{\prod_{k=1}^{N}(1 - d_k z^{-1})}{\tilde{b}\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})} \quad ; \quad \tilde{b} = \frac{b_0}{a_0}$$

Sistema de FASE MÍNIMA :
todos sus ceros y polos están dentro del circulo unitario, el sistema y su inverso son estables y causales.



7.7 Estructuras de programación para implementar sistemas en tiempo discreto

$$\left.\begin{array}{c} H(z) \\ x[n] \xleftrightarrow{z} X(z) \end{array}\right\} \Rightarrow Y(z) = H(z)X(z) \Rightarrow y[n] \xleftrightarrow{z} Y(z)$$

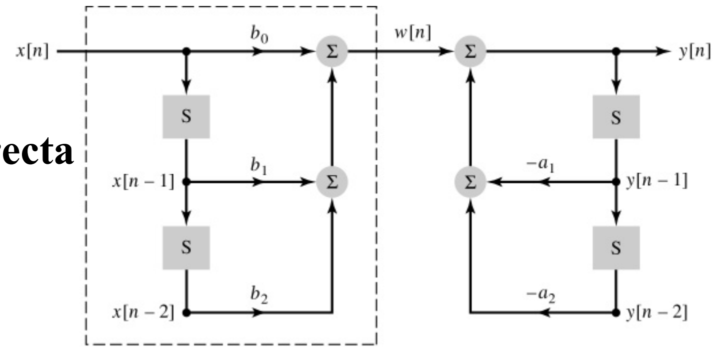
Hay muchas implementaciones de diagramas de bloques diferentes que corresponden a un sistema con una característica entrada-salida.
Elegir optimizando criterios asociados con el cálculo :
- -Número operaciones,
- -Sensibilidad del sistema a los redondeos numéricos de los cálculos

En las representaciones mediante diagramas de bloques del Capitulo 2 implementamos sistemas descritos por ecuaciones en diferencia
Teníamos las operaciones :

Corrimiento en el tiempo, operador S (**z^{-1}** en transformadas z)
Multiplicación por constante
Sumas

Figure 2.33 (p. 162)
Block diagram representation of a discrete-time LTI system described by a second-order difference equation.

Forma I directa



$$w[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2]$$
$$y[n] = -a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] + w[n]$$
$$y[n] = -a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2]$$
$$y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2]$$
$$n \geq 0 \Rightarrow y[-1], y[-2]\ C.I.$$

7.7a cont.

$$y[n]+a_1y[n-1]+a_2y[n-2]=b_0x[n]+b_1x[n-1]+b_2x[n-2]$$

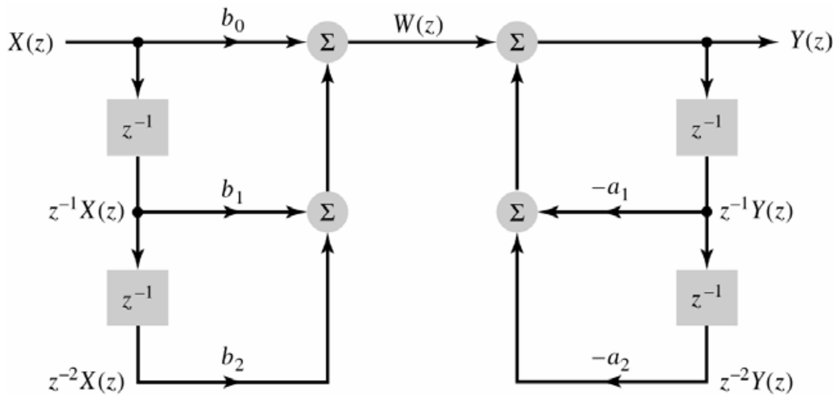
$$n\geq 0 \Rightarrow y[-1]=y[-2]=0 \quad C.I.\ nulas$$

aplicando la transformada z

$$Y(z)(1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2})=X(z)(b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2})$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$$

Forma directa I



7.7b cont.

Para obtener la forma directa II :

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}=\left[b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}\right]\frac{1}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}=\left[H_1(z)\right]H_2(z)$$

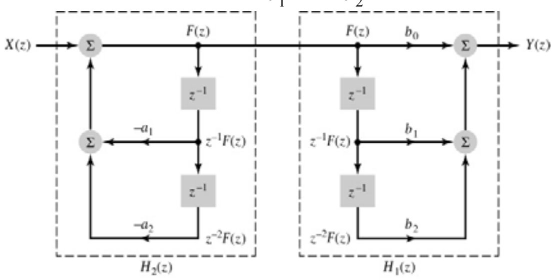
$$Y(z)=H_1(z)\left[H_2(z)X(z)\right]$$

$$F(z)=H_2(z)X(z)$$

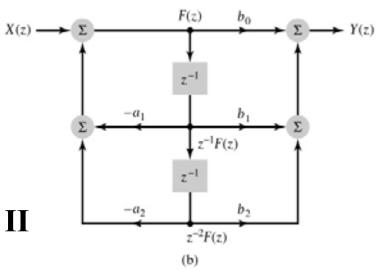
$$Y(z)=H_1(z)F(z)$$

$$H_1(z)=b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}$$

$$H_2(z)=\frac{1}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$$



(a)



(b)

Forma directa II

Implementación en cascada

7.7c cont.

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}=\frac{\tilde{b}\prod_{k=1}^{M}(1-c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_k z^{-1})}=\prod_{i=1}^{p} H_i(z)$$

Las $H_i(z)$ contienen subconjuntos distintos de ceros y polos de H(z). Los $H_i(z)$ son de primero o segundo orden.

Implementación en paralelo

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}=\frac{\frac{1}{a_0}\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_k z^{-1})}=\sum_{i=1}^{p} H_i(z)$$

Cada $H_i(z)$ contiene un conjunto distinto de los polos de H(z), uno o dos polos.

Problema 7.39

Dado el sistema definido por la ecuación en diferencias, dibuje una implementación de diagrama de bloques como una combinación en paralelo de secciones de segundo orden con coeficientes de valores reales.

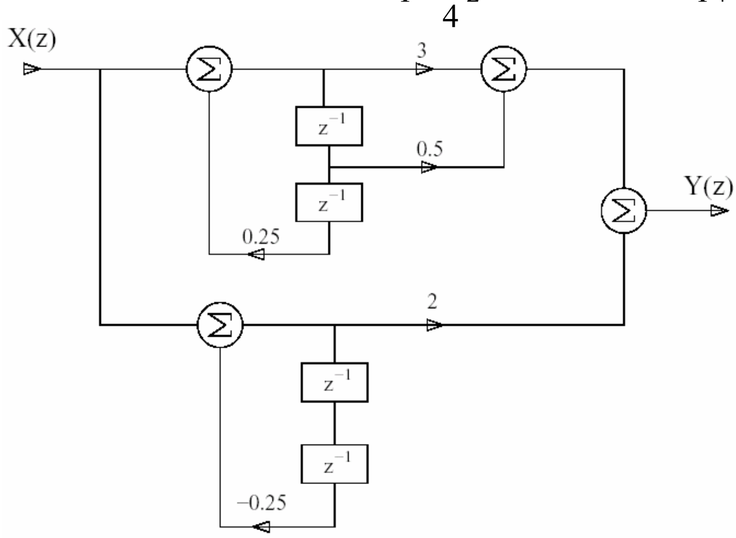
$$h[n]=2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\left(\frac{j}{2}\right)^n u[n]+\left(\frac{-j}{2}\right)^n u[n]+\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$H[z]=\frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{1}{1-\frac{j}{2}z^{-1}}+\frac{1}{1+\frac{j}{2}z^{-1}}+\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$H[z]=\frac{3+\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}+\frac{2}{1+\frac{1}{4}z^{-2}}=H_1(z)+H_2(z)$$

Problema 7.39a

$$H_1(z) = \frac{3 + \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}} \quad ; \quad H_2(z) = \frac{2}{1 + \frac{1}{4}z^{-2}}$$



7.8 La transformada z unilateral.

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad ; \quad \textit{depende solo de } x[n], \forall n \geq 0$$

$$x[n] \overset{z_u}{\longleftrightarrow} X(z)$$

Apropiada en problemas que incluyan señales y sistema causales
No necesitamos usar ROC.
Permite estudiar sistemas descritos por ecuaciones en diferencias con condiciones iniciales no nulas.
Para señales causales coinciden las transformadas z bilateral y unilateral.
Satisface las mismas propiedades que la transformada z bilateral excepto la propiedad de corrimiento.

7.8a cont.

Propiedad de corrimiento

$$w[n]=x[n-1] \ ; \quad X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$W(z)=\sum_{n=0}^{\infty} w[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty} x[n-1]z^{-n}=x[-1]+\sum_{n=1}^{\infty} x[n-1]z^{-n} \overset{m=n-1}{=}$$

$$=x[-1]+\sum_{m=0}^{\infty} x[m]z^{-(m+1)}=x[-1]+z^{-1}\sum_{m=0}^{\infty} x[m]z^{-m}=x[-1]+z^{-1}X(z)$$

$$x[n] \overset{z_u}{\longleftrightarrow} X(z)$$

$$x[n-1] \overset{z_u}{\longleftrightarrow} x[-1]+\mathbf{z^{-1}X(z)}$$

$$x[n-k] \overset{z_u}{\longleftrightarrow} x[-k]+x[-k+1]z^{-1}+\cdots+x[-1]z^{-k+1}+\mathbf{z^{-k}X(z)}, \ \forall k>0$$

$$x[n-k] \overset{z_u}{\longleftrightarrow} -x[0]z^{k}-x[1]z^{k-1}-\cdots-x[k-1]z+\mathbf{z^{k}X(z)}, \ \forall k>0$$

7.8b cont.

Solución de ecuaciones en diferencias con condiciones iniciales

Las condiciones iniciales se incorporan como una propiedad de corrimiento en el tiempo.

$$x[n-k] \overset{z_u}{\longleftrightarrow} x[-k]+x[-k+1]z^{-1}+\cdots+x[-1]z^{-k+1}+\mathbf{z^{-k}X(z)}, \ \forall k>0$$

$$\textit{sistema causal} \Rightarrow x[n-k] \overset{z_u}{\longleftrightarrow} z^{-k}X(z)$$

$$\textit{N condiciones iniciales} \Rightarrow y[-1], y[-2], \cdots, y[-N]$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k]=\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \overset{z}{\longleftrightarrow} A(z)Y(z)+C(z)=B(z)X(z)$$

$$A(z)=\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} \quad ; \quad B(Z)=\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$$

$$C(z)=\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=m+1}^{N} a_k y[-k+m]z^{-m}$$

$$Y(z)=\frac{B(z)}{A(z)}X(z)-\frac{C(z)}{A(z)}=Y^{(f)}(z)+Y^{(n)}(z)$$

Ejemplo 7.23_1

Suponemos que abrimos una cuenta bancaria con 10.000 €
El banco nos da un interés compuesto mensual "r" es del 6 %
A partir del primer mes del segundo año sacamos 100 € mensuales
Determinar el balance al final de cada mes
Calcula cuantos meses tienen que transcurrir para que dicho balance se haga cero.
Sea :
ρ=1+r/100=1+(6/12)/100=1,005
x[n] ingreso/adeudo mensual
y[n] balance después del ingreso/adeudo mensual
y[-1]=10.000 € condición inicial
Hay un retardo de 2 entre el índice temporal "n" y el índice del mes
y[n] representa el balance de la cuenta al principio del mes "n+2"
El primer adeudo de 100 € lo realizaremos al principio del mes 13 (n=11)

Ejemplo 7.23_1a

$$y[n]-\rho y[n-1]=x[n]$$

$$Y(z)-\rho\left[y[-1]+z^{-1}Y(z)\right]=X(z)$$

$$(1-\rho z^{-1})Y(z)=X(z)+\rho y[-1]$$

$$Y(z)=\frac{X(z)}{1-\rho z^{-1}}+\frac{\rho y[-1]}{1-\rho z^{-1}}$$

$$x[n]=-100u[n-11]\xleftrightarrow{z}X(z)=\frac{-100z^{-11}}{1-z^{-1}}$$

$$Y(z)=\frac{-100z^{-11}}{(1-z^{-1})(1-1{,}005z^{-1})}+\frac{1.005(10.000)}{1-1{,}005z^{-1}}=Y^{(f)}(z)+Y^{(n)}(z)$$

$$Y(z)=\frac{20.000z^{-11}}{1-z^{-1}}-\frac{20.000z^{-11}}{1-1{,}005z^{-1}}+\frac{10.050}{1-1{,}005z^{-1}}$$

$$y[n]=20.000u[n-11]-20.000(1{,}005)^{n-11}u[n-11]+10.050(1{,}005)^{n}u[n]$$

El balance se hace cero al sacar dinero al principio del mes 163

Figure 7.30a (p. 601)

Solution to Example 7.23_1, depicted as a function of the month. (a) Account balance at the start of each month following possible withdrawal.

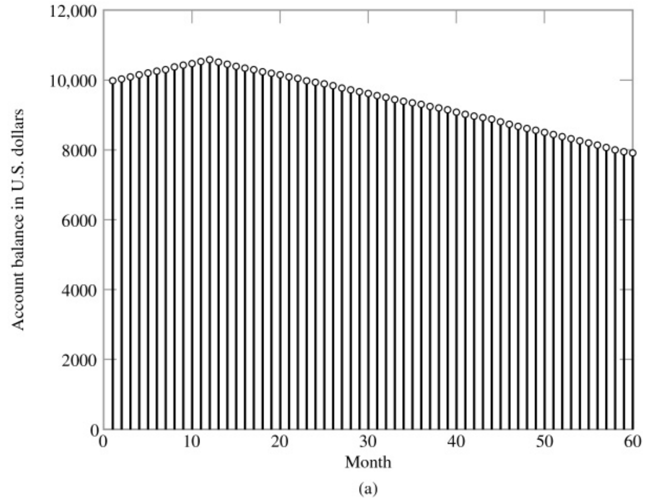


Figure 7.30b (p. 601)

(b) Natural response.

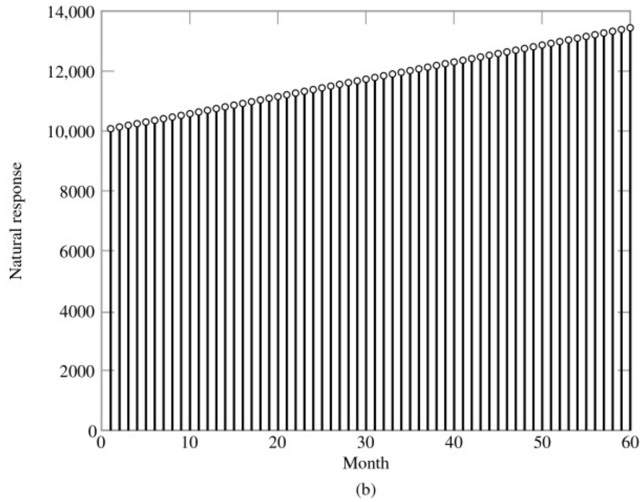
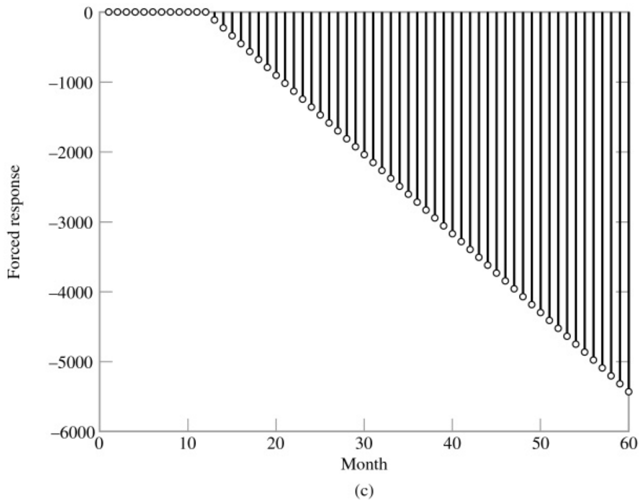


Figure 7.30c (p. 602)
Forced response.



Ejemplo 7.23_2

Suponemos que abrimos una cuenta bancaria con 10.000 €
El banco nos da un interés compuesto mensual “r” es del 6 %
A partir del primer mes del segundo año sacamos 100 € mensuales
Determinar el balance al final de cada mes
Calcula cuantos meses tienen que transcurrir para que dicho balance se haga cero.
Sea :
$\rho=1+r/100=1+(6/12)/100=1.005$
x[n] ingreso/adeudo mensual
y[n] balance después del ingreso/adeudo mensual
mes=1 , n=0 , y[0]=10.000 €
Hay un retardo de 1 entre el índice temporal “n” y el índice del mes
y[n] representa el balance de la cuenta en el mes ”n+1”
El primer adeudo de 100 € lo realizaremos en el mes 13 (n=12)

Ejemplo 7.23_2a

$$y[n]-\rho y[n-1]=x[n]$$

$$Y(z)-\rho z^{-1}Y(z)=X(z)$$

$$(1-\rho z^{-1})Y(z)=X(z)$$

$$Y(z)=\frac{X(z)}{1-\rho z^{-1}}$$

$$x[n]=10.000\delta[n]-100u[n-12]\xleftrightarrow{z}X(z)=10.000-\frac{100z^{-12}}{1-z^{-1}}$$

$$Y(z)=\frac{10.000}{1-1{,}005z^{-1}}-\frac{100z^{-12}}{(1-z^{-1})(1-1{,}005z^{-1})}=$$

$$Y(z)=\frac{10.000}{1-1{,}005z^{-1}}+\frac{20.000z^{-12}}{1-z^{-1}}-\frac{20.000z^{-12}}{1-1{,}005z^{-1}}$$

$$y[n]=10.000(1{,}005)^{n}u[n]+20{,}000u[n-12]-20{,}000(1.005)^{n-12}u[n-12]$$

El balance se hace cero al sacar dinero el mes 163

Problema 7.17

7.17. Determine the z-transform and ROC for the following time signals: Sketch the ROC, poles, and zeros in the z-plane.

(a) $x[n]=\delta[n-k]$, $k>0$

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \\ &= z^{-k}, \quad z \neq 0 \end{aligned}$$

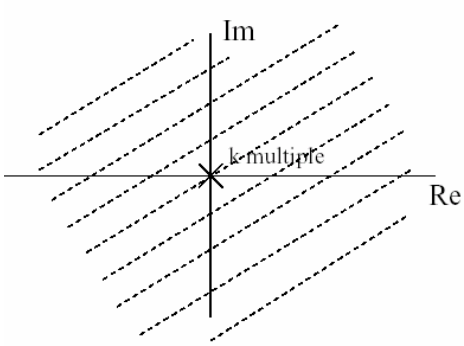


Figure P7.17. (a) ROC

Problema 7.20

7.20. Use the tables of z-transforms and z-transform properties given in Appendix E to determine the z-transforms of the following signals:
(a) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] * 2^n u[-n-1]$

$$a[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad \xleftrightarrow{z} \quad A(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$
$$b[n] = 2^n u[-n-1] \quad \xleftrightarrow{z} \quad B(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}}, \quad |z| < 2$$
$$x[n] = a[n] * b[n] \quad \xleftrightarrow{z} \quad X(z) = A(z)B(z)$$
$$X(z) \quad = \quad \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right)\left(\frac{1}{1-2z^{-1}}\right), \quad \frac{1}{2} < |z| < 2$$

Problema 7.21

7.21. Given the z-transform pair $x[n] \xleftrightarrow{z} \frac{z^2}{z^2-16}$ with ROC $|z| < 4$, use the z-transform properties to determine the z-transform of the following signals:

(d) $y[n] = nx[n]$

$$y[n] = nx[n] \quad \xleftrightarrow{z} \quad Y(z) = -z\frac{d}{dz}X(z) = \frac{32z^2}{(z^2-16)^2}$$

Problema 7.24

7.24. Use the method of partial fractions to obtain the time-domain signals corresponding to the following z-transforms:

(d) $X(z) = \frac{z^2 - 3z}{z^2 + \frac{3}{2}z - 1}, \quad \frac{1}{2} < |z| < 2$

$x[n]$ is two-sided

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1 - 3z^{-1}}{1 + \frac{3}{2}z^{-1} - z^{-2}} \\ &= \frac{A}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1 + 2z^{-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= A + B \\ -3 &= 2A - \frac{1}{2}B \\ X(z) &= \frac{-1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{2}{1 - 2z^{-1}} \\ x[n] &= -(-\frac{1}{2})^n u[n] - 2(2)^n u[-n-1] \end{aligned}$$

Problema 7.29

7.29. A causal system has input $x[n]$ and output $y[n]$. Use the transfer function to determine the impulse response of this system.

(a) $x[n] = \delta[n] + \frac{1}{4}\delta[n-1] - \frac{1}{8}\delta[n-2], \quad y[n] = \delta[n] - \frac{3}{4}\delta[n-1]$

$$\begin{aligned} X(z) &= 1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-1} \\ Y(z) &= 1 - \frac{3}{4}z^{-1} \\ H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} \\ &= \frac{-\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{\frac{5}{3}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \\ h[n] &= \frac{1}{3}\left[5(-\frac{1}{2})^n - 2(\frac{1}{4})^n\right] u[n] \end{aligned}$$

Problema 7.31

7.31. Determine (i) transfer function and (ii) impulse response representations for the systems described by the following difference equations:

(a) $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = 2x[n-1]$

$$\begin{aligned} Y(z)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) &= 2z^{-1}X(z) \\ H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} \\ &= \frac{2z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \\ h[n] &= 2(\frac{1}{2})^{n-1}u[n-1] \end{aligned}$$

Problema 7.31

7.31. Determine (i) transfer function and (ii) impulse response representations for the systems described by the following difference equations:

(c) $y[n] - \frac{4}{5}y[n-1] - \frac{16}{25}y[n-2] = 2x[n] + x[n-1]$

$$Y(z)\left(1 - \frac{4}{5}z^{-1} - \frac{16}{25}z^{-2}\right) = (2 + z^{-1})X(z)$$

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} \\ &= \frac{2}{1 - \frac{4}{5}z^{-1}} + \frac{\frac{13}{5}z^{-1}}{(1 - \frac{4}{5}z^{-1})^2} \\ h[n] &= \left[2(\frac{4}{5})^n + \frac{13}{4}n(\frac{4}{5})^n\right]u[n] \end{aligned}$$

Problema 7.32

7.32. Determine (i) transfer function and (ii) difference-equation representations for the systems with the following impulse responses:

$$\text{(a) } h[n] = 3\left(\tfrac{1}{4}\right)^n u[n-1]$$

$$\begin{aligned} h[n] &= 3\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1] \\ H(z) &= \frac{\frac{3}{4}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \\ &= \frac{Y(z)}{X(z)} \end{aligned}$$

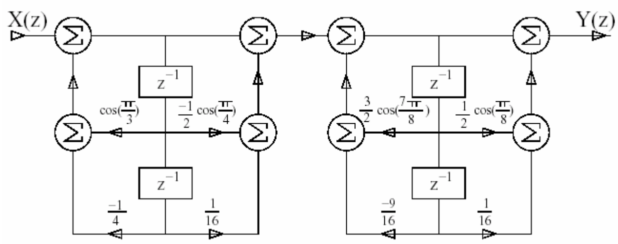
$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = \frac{3}{4}x[n-1]$$

Problema 7.38

7.38. Draw block-diagram implementations of the following systems as a cascade of second-order sections with real-valued coefficients:

$$\text{(a) } H(z) = \frac{(1-\frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1-\frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1})(1+\frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{8}}z^{-1})(1+\frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{8}}z^{-1})}{(1-\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}z^{-1})(1-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}z^{-1})(1-\frac{3}{4}e^{j\frac{7\pi}{8}}z^{-1})(1-\frac{3}{4}e^{-j\frac{7\pi}{8}}z^{-1})}$$

$$\begin{aligned} H(z) &= H_1(z)H_2(z) \\ H_1(z) &= \frac{1-\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{4})z^{-1}+\frac{1}{16}z^{-2}}{1-\cos(\frac{\pi}{3})z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}} \\ H_2(z) &= \frac{1+\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{8})z^{-1}+\frac{1}{16}z^{-2}}{1-\frac{3}{2}\cos(\frac{7\pi}{8})z^{-1}+\frac{9}{16}z^{-2}} \end{aligned}$$

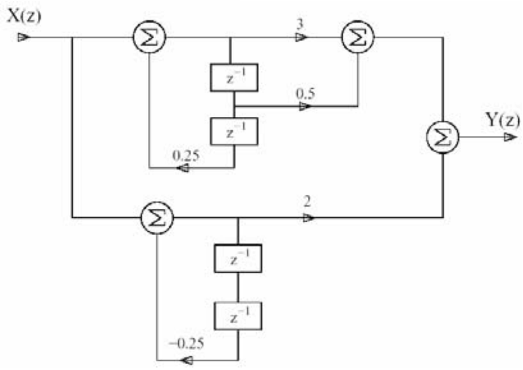


Problema 7.39

7.39. Draw block diagram implementations of the following systems as a parallel combination of second-order sections with real-valued coefficients:

(a) $h[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{j}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{-j}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{-1}{2}\right)^n u[n]$

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{j}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1+\frac{j}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \\ &= \frac{3+\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}} + \frac{2}{1+\frac{1}{4}z^{-2}} \\ H(z) &= H_1(z) + H_2(z) \end{aligned}$$



Problema 7.41

7.41. Let $x[n] = u[n+4]$.

(a) Determine the unilateral z-transform of $x[n]$.

$$x[n] = u[n+4] \overset{z_u}{\longleftrightarrow} X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \\ &= \frac{1}{1-z^{-1}} \end{aligned}$$

Problema 7.42

7.42. Use the unilateral z-transform to determine the forced response, the natural response, and the complete response of the systems described by the following difference equations with the given inputs and initial conditions.

(a) $y[n] - \frac{1}{3}y[n-1] = 2x[n], \quad y[-1] = 1, \; x[n] = (\frac{-1}{2})^n u[n]$

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \\
Y(z) - \frac{1}{3}\left(z^{-1}Y(z) + 1\right) &= 2X(z) \\
Y(z)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right) &= \frac{1}{3} + 2X(z) \\
Y(z) &= \underbrace{\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}}_{Y^{(n)}(z)} + \underbrace{2\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}X(z)}_{Y^{(f)}(z)}
\end{aligned}
$$

Problema 7.42

Natural Response

$$
\begin{aligned}
Y^{(n)}(z) &= \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \\
y^{(n)}[n] &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]
\end{aligned}
$$

Forced Response

$$
\begin{aligned}
Y^{(f)}(z) &= \frac{\frac{6}{5}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \\
y^{(f)}[n] &= \left[\frac{6}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] u[n]
\end{aligned}
$$

Complete Response

$$
y[n] = \left[\frac{6}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{17}{15}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] u[n]
$$