Departamento d'Informática. E.T.S.E. Universitat de València

SISTEMAS Y SEÑALES- INGENIERÍA EN INFORMÁTICA

PRÁCTICA 4: Discretización de sistemas continuos

Cálculo de la respuesta en frecuencias

1.- La respuesta en frecuencias de un sistema $H(\omega) = \dfrac{1 + j\omega}{3 + j\omega}$

consiste en representar el módulo ***|H(ω)|***, su argumento ***arg[H(ω)]*** con respecto a ***ω***.

a)Calcula ***|H(ω)|*** su argumento ***arg[H(ω)]*** analíticamente (con lápiz y papel).

b)Realiza una macro para calcular la respuesta en frecuencias de un sistema lineal con respuesta al impulso ***h(t)*** cuya transformada de Fourier tiene la expresión ***H(ω)***. Recuerda que ***H(ω)*** es una función de variable compleja, por tanto, tendrá un módulo ***|H(ω)|***, distinto en cada valor de ***ω*** (usa valores de ***ω*** que varíen logarítmicamente desde [0,1,…,100]), y un argumento, también variable con ***ω***, que llamaremos ***Ø(ω) = arg[H(ω)]*** .

(Ayuda: usa las funciones ***abs()*** que calcula el módulo de un número y ***angle()*** que obtiene el argumento de un número. Para la representación gráfica en forma logarítmica usa la función ***semilogx()*** que realiza un plot en escala logarítmica)

Discretización de un sistema continuo

Dado un sistema continuo H caracterizado por una función de transferencia,

$$H(\omega) = \frac{a + j\omega}{b + j\omega}$$

2 .-Realiza la discretización del sistema anterior ***H(ω)***, analíticamente (con lápiz y papel), usando la transformación bilineal o método de Tustin

$$j\omega = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} \quad ; \qquad \text{T=0.1 s}$$

3.- Hallar la ecuación en diferencias del sistema del apartado 1 con las ecuaciones que acabas de obtener en el apartado 2.

4.- Halla la respuesta del sistema ***H(z)*** ante el impulso. ¿ Se trata de un sistema FIR o IIR?. Razona tu respuesta. Para la representación gráfica de señales discretas usaremos una función propia llamada ***dobplotd(td,x,y,width)*** donde ***td*** es el vector de tiempos discreto, ***x*** e ***y*** las señales que quieres representar (en esta ocasión la entrada y la salida), y ***width*** el ancho que es opcional (no hace falta que lo uséis). Usa esta función para representar las señales en los siguientes apartados.

5.- Halla la respuesta del sistema ***H(z)*** ante el escalón. ¿Cuál es la ganancia estática del sistema?.

6.- Halla la respuesta del sistema ***H(z)*** ante una onda senoidal de frecuencia f=1 Hz. Recuerda que $\boldsymbol{\omega = 2\pi f}$.

7.- Realiza lo mismo que en el apartado anterior pero para una onda senoidal de frecuencia f=4 Hz, y para una onda senoidal de frecuencia f=11 Hz. Compara las tres ondas senoidales y observa el fenómeno de alisasing. ¿ Porqué crees que se ha elegido una onda senoidal de 11 Hz para este ejercicio?.

```
function plotd(td,sig,width)
if (nargin==2) width= 0.025;
end;
bar(td,sig,width);
hold on;
plot(td,sig,'bx');
hold off;
```

```
function dobplotd(td,sigl,sig2,width)
if (nargin==3) width=0.025;
end;
subplot(2, 1,1);
plotd(td,sigl ,width);
subplot(2, 1,2);
plotd(td,sig2,width);
```

Respuesta en frecuencia de un sistema

$$H(\omega)=\frac{a+j\omega}{b+j\omega}$$

$$|H(\omega)|=\left|\frac{a+j\omega}{b+j\omega}\right|=\frac{|a+j\omega|}{|b+j\omega|}=\frac{\sqrt{a^2+\omega^2}}{\sqrt{b^2+\omega^2}}=\frac{\left(a^2+\omega^2\right)^{1/2}}{\left(b^2+\omega^2\right)^{1/2}}$$

$$|H(\omega)|db=20\log|H(\omega)|=10\log\left(a^2+\omega^2\right)-10\log\left(b^2+\omega^2\right)$$

$$\arg\left(H(\omega)\right)=\arg\left(\frac{a+j\omega}{b+j\omega}\right)=\arg\left(a+j\omega\right)-\arg\left(b+j\omega\right)=arctg\left(\frac{\omega}{a}\right)-arctg\left(\frac{\omega}{b}\right)$$

Discretizar usando la transformación bilineal o método de Tustin.

$$H(\omega)=\frac{a+j\omega}{b+j\omega} \qquad ; \qquad j\omega=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

$$H(z)=\frac{a+\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}{b+\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}=\frac{aT(z+1)+2(z-1)}{bT(z+1)+2(z-1)}=\frac{aT+2}{bT+2}\frac{z+\frac{aT-2}{aT+2}}{z+\frac{bT-2}{bT+2}}=A\frac{z+\alpha}{z+\beta}$$

$$A=\frac{aT+2}{bT+2} \qquad ; \qquad \alpha=\frac{aT-2}{aT+2} \qquad ; \qquad \beta=\frac{bT-2}{bT+2}$$

$$H(\omega)=\frac{1+j\omega}{3+j\omega} \qquad ; \qquad a=1 \qquad ; \qquad b=3 \qquad ; \qquad T=0.1$$

$$A=0.91 \qquad ; \qquad \alpha=-0.9 \qquad ; \qquad \beta=-0.74$$

$$H(z)=0.91\frac{z-0.9}{z-0.74}$$

Ecuación en diferencias

$$Y(z)=H(z)X(z)=A\frac{z+\alpha}{z+\beta}X(z)=A\frac{1+\alpha z^{-1}}{1+\beta z^{-1}}X(z)$$

$$\left(1+\beta z^{-1}\right)Y(z)=A\left(1+\alpha z^{-1}\right)X(z)$$

$$Y(z)+\beta z^{-1}Y(z)=AX(z)+A\alpha z^{-1}X(z)$$

$$y[n]+\beta y[n-1]=Ax[n]+A\alpha x[n-1]$$

Ganancia estática

$$Y(z)=H(z)X(z)=A\frac{z+\alpha}{z+\beta}U(z)=A\frac{z+\alpha}{z+\beta}\frac{Tz}{z-1}$$

$$\lim_{n\to\infty}y[n]=\lim_{n\to 1}(z-1)Y(z)=\lim_{n\to 1}(z-1)A\frac{z+\alpha}{z+\beta}\frac{Tz}{z-1}=AT\frac{1+\alpha}{1+\beta}=0.91*0.1\frac{1-0.9}{1-0.74}=0.035$$

$$Ganancia\ estática=\lim_{n\to\infty}\frac{y[n]}{x[n]}=0.035=H(1)$$

FIR : Sistema Respuesta al Impulso Finita (todos los polos en el origen)

$$H(z)=\frac{b_m z^m+\ldots+b_1 z+b_0}{z^n} \quad ; \quad m\le n \quad ; \quad b_i\in R$$