

PRÁCTICA 1: Análisis en el dominio del tiempo de sistemas continuos simples

I.- Procesamiento de señal en Matlab

Tal y como se vio en el curso anterior, Matlab trabaja con un único tipo de elementos: las matrices. Los tipos de datos básicos con los que vamos a trabajar para el procesado de señales unidimensionales, secuencias o señales bidimensionales. Todos estos datos pueden ser representados de una manera sencilla mediante matrices. De esta forma, se intuye que Matlab es una herramienta potente para el procesado de señales, debido a la facilidad que presenta para el tratamiento matricial de datos.

II.- Representación de señales en tiempo continuo

Para representar señales unidimensionales utilizaremos vectores, ya que estos no son más que el caso matricial particular $1 \times n$ o $n \times 1$, donde n es el número de elementos del vector. Si queremos representar señales en tiempo continuo con Matlab tenemos que utilizar un vector base de tiempos que sea suficientemente grande para que nos de la sensación de continuidad (recordar que un ordenador por definición es un sistema discreto).

Ejemplo Generar una señal senoidal de la forma $\sin(2\pi ft)$, con frecuencia $f=10$ Hz, y representarla gráficamente en Matlab en un intervalo de tiempo entre $[0, 1]$ segundos.

```
>> t = [0:0.001:1];  
>> s = sin(2*pi*f*t);  
>> plot(t,s)
```

Así hemos creado un vector de tiempos en forma de fila con 1001 elementos. Dicho vector va desde 0 hasta 1 en paso de 0.001 segundos.

III.- Funciones específicas para generar señales

Con el fin de facilitar la tarea de construcción de las secuencias más usadas en el procesado de señales, Matlab dispone de funciones específicas para la creación de estas señales. La función *square* genera una onda cuadrada para una determinada frecuencia de muestreo con la siguiente sintaxis: $\gg \text{square}(2\pi f^*t)$. La función $\gg \text{sawtooth}(2\pi f^*t)$ genera una señal diente de sierra.

1. Genera la misma señal del ejemplo anterior con distintos vectores base de tiempo, y represéntalos gráficamente. Qué observas usando distintos vectores base de tiempo de intervalo mayor que 0.001?
2. Genera otra señal en tiempo continuo con una frecuencia fundamental $f=5$ Hz en un intervalo de tiempo entre 0 y 2 segundos y represéntalo gráficamente.
3. Genera una señal impulso y una señal escalón unitario $u(t)$. Para ello usa las funciones *zeros* y *ones* que generan vectores con zeros y unos respectivamente. Utiliza la ayuda de Matlab $\gg \text{help}$, para obtener información de la función que desees, por ejemplo con $\gg \text{help zeros}$ obtendremos información de la función *zeros*. ¿Cómo generarías una señal escalón de 5 unidades de amplitud?. Represéntala gráficamente.
4. Genera una señal rampa y una señal parábola sabiendo que la ecuación que caracteriza una rampa es $y=t$, y la que caracteriza una parábola es $y=t^2$.

- Utiliza las funciones que dispone Matlab para generar una señal cuadrada unitaria con una frecuencia de 1Hz, la misma señal cuadrada pero ahora con una amplitud de 5 unidades y una señal en diente de sierra con una frecuencia de 2Hz.

IV.- Sistemas lineales e invariantes con el tiempo (LTI)

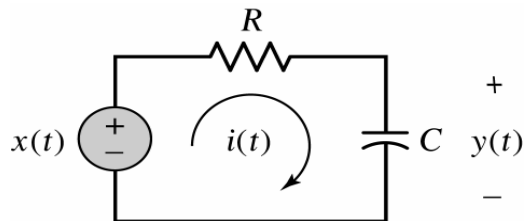
Un problema fundamental en el análisis de sistemas es la obtención de la respuesta a alguna entrada determinada. Analíticamente, esto se puede resolver de formas muy diferentes. Una forma obvia es resolviendo la ecuación diferencial que describe el sistema, teniendo en cuenta la entrada específica y las condiciones iniciales. Y, otra forma usando la integral de convolución. Así, la salida $y(t)$ de un sistema LTI la podemos obtener calculando la integral de convolución entre las señales $x(t)$ y $h(t)$, donde $x(t)$ es la entrada al sistema y $h(t)$ la respuesta del sistema lineal ante una entrada impulso.

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad [1]$$

Consideremos un circuito RC . Este circuito se puede ver como un sistema en tiempo continuo cuya entrada $x(t)$ es la tensión eléctrica que aplicamos al circuito mediante una fuente de alimentación, y la salida $y(t)$ es la tensión eléctrica medida en los bornes del condensador. Aplicando la ley de Kirchoff a la tensión en el condensador, obtenemos la ecuación diferencial [2] que es la ecuación de entrada/salida que describe el comportamiento del sistema.

$$i(t) = \frac{x(t) - y(t)}{R}$$

$$y(t) = \frac{Q}{C} = \frac{\int i(t)dt}{C} \Rightarrow i(t) = C \frac{d}{dt} y(t)$$



$$RC \frac{d}{dt} y(t) + y(t) = x(t) \quad [2]$$

- Calcula analíticamente $h(t)$ para el sistema lineal que conforma el circuito RC.
- Representa gráficamente la función $h(t)$ y $x(t)$, siendo $x(t)$ una entrada en escalón $u(t)$ como la que has utilizado en los ejercicios anteriores.
- Calcula la salida del sistema ante una entrada en escalón $u(t)$ usando la integral de convolución. Usa la función **conv** que posee Matlab, y representa el resultado gráficamente.
- Calcula la salida del sistema ante una entrada senoidal y diente de sierra.
- Realiza tu propia función de convolución **miconv**. Para ello utiliza la ecuación [1]. Tener en cuenta que $h(t-\tau)$ es una versión invertida y desplazada de $h(t)$.

PRÁCTICA 1: Análisis en el dominio del tiempo de sistemas continuos simples

Material complementario a la Práctica 1.

IV.- Sistemas lineales e invariantes con el tiempo (LTI)

Resolver la ecuación diferencial

$$RC \frac{d}{dt} y(t) + y(t) = x(t)$$

Calcular la solución homogénea.

Ecuación homogénea : $RC \frac{d}{dt} y(t) + y(t) = 0$

Solución : $y^{(h)}(t) = c_1 e^{r_1 t}$ (N=1)

Donde r_1 es la raíz de la ecuación característica : $RCr_1 + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = -1/RC$

Solución homogénea : $y^{(h)}(t) = c_1 e^{-\frac{1}{RC}t}$

Calcular la solución particular. Entrada coseinodal.

Entrada $x(t) = \cos(\omega_0 t)$

Ecuación diferencial $RC \frac{d}{dt} y(t) + y(t) = x(t)$

Consideramos $y^{(p)}(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \text{sen}(\omega_0 t)$

$-RCc_1 \omega_0 \text{sen}(\omega_0 t) + RCc_2 \omega_0 \cos(\omega_0 t) + c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \text{sen}(\omega_0 t) = \cos(\omega_0 t)$

$-RCc_1 \omega_0 + c_2 = 0$

$RCc_2 \omega_0 + c_1 = 1$

$c_1 = \frac{1}{1+(RC\omega_0)^2}$; $c_2 = \frac{RC\omega_0}{1+(RC\omega_0)^2}$

Solución particular $y^{(p)}(t) = \frac{1}{1+(RC\omega_0)^2} \cos(\omega_0 t) + \frac{RC\omega_0}{1+(RC\omega_0)^2} \text{sen}(\omega_0 t)$

Respuesta completa. Entrada coseinodal.

Entrada $x(t) = \cos(\omega_0 t)u(t)$

Suponemos que : $y(0^-)=2$ $R=10K\Omega$ $C=100 \mu F$ y $\omega_0 = 1$
 $RC = 1$

$$y(t) = y^{(n)}(t) + y^{(p)}(t) = ce^{-t} + \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sen t \quad , t > 0$$

$$y(0^-) = y(0^+) = 2 = c + \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

Respuesta completa $y(t) = \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sen t \quad , t > 0$

Respuesta natural.

Suponemos que : $y(0^-)=2$ $R=10K\Omega$ $C=100 \mu F$

La solución homogénea : $y^{(h)}(t) = c_1 e^{-t}$

Respuesta natural $y^{(n)}(0) = c_1 e^{-0} = 2 \Rightarrow c_1 = 2$

Respuesta natural $y^{(n)}(t) = 2e^{-t} \quad \forall t \geq 0$

Respuesta forzada. Entrada coseinodal.

Entrada $x(t) = \cos(\omega_0 t)u(t)$

Suponemos que : $y(0^-)=2$ $R=10K\Omega$ $C=100 \mu F$ y $\omega_0 = 1$

$$y(t) = ce^{-t} + \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sen t \quad , t > 0$$

$$y(0^-) = y(0^+) = 0$$

$$y(0) = c + \frac{1}{2} = 0 \quad c = -\frac{1}{2}$$

Respuesta forzada $y^{(f)}(t) = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sen t \quad , t > 0$

Respuesta total

$$y(t) = y^{(n)}(t) + y^{(f)}(t) = y^{(f)}(t) = \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sen t \quad , t > 0$$

6. Calcular la respuesta $h(t)$ a la entrada impulso.

$$x(t) = \delta(t) \Rightarrow y(t) = h(t)$$

$$y^{(p)}(t) = h^{(p)}(t) = 0$$

$$y(t) = h(t) = y^{(n)}(t) + y^{(p)}(t) = c_1 e^{-\frac{1}{RC}t} u(t)$$

$$RC \frac{d}{dt} \left[c_1 e^{-\frac{1}{RC}t} u(t) \right] + c_1 e^{-\frac{1}{RC}t} u(t) = \delta(t)$$

$$RC \left[-\frac{c_1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} u(t) + c_1 e^{-\frac{1}{RC}t} \delta(t) \right] + c_1 e^{-\frac{1}{RC}t} u(t) = \delta(t)$$

$$RC c_1 e^{-\frac{1}{RC}t} \delta(t) = \delta(t)$$

$$t = 0 \Rightarrow RC c_1 = 1$$

$$c_1 = \frac{1}{RC}$$

Respuesta al impulso
$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} u(t)$$

La respuesta en frecuencia
$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\tau}{RC}} u(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(j\omega + \frac{1}{RC})\tau} d\tau = \frac{1}{RC} \frac{-1}{j\omega + \frac{1}{RC}} e^{-(j\omega + \frac{1}{RC})\tau} \Big|_0^{\infty}$$

Respuesta en frecuencia
$$H(j\omega) = \frac{1/RC}{j\omega + 1/RC} = \frac{1}{j\omega RC + 1}$$

8. Calcular la respuesta $s(t)$ a la entrada escalón.

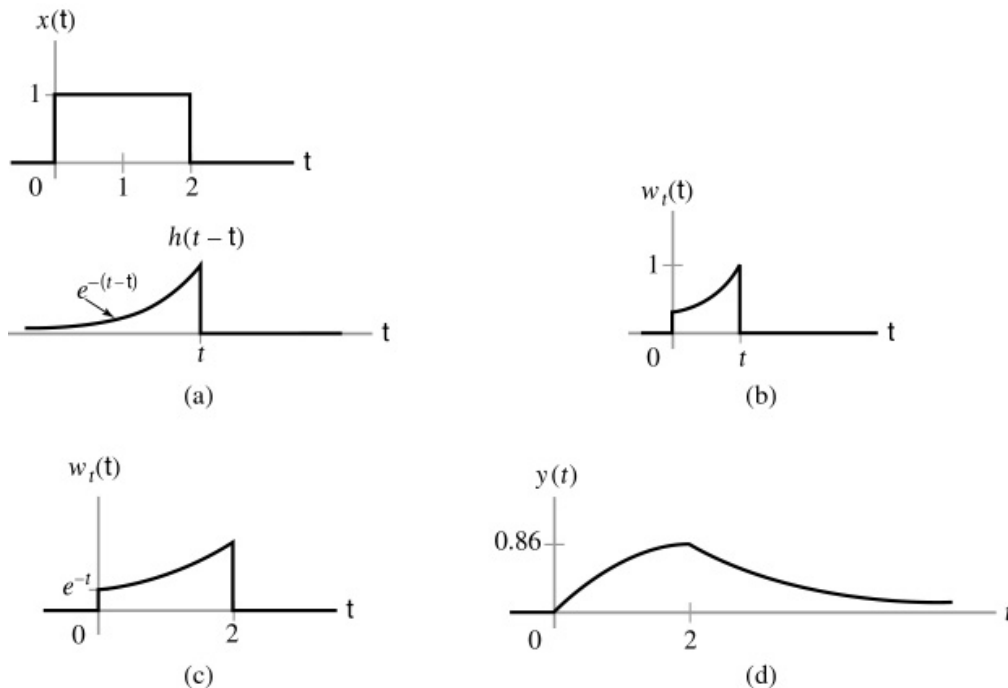
Respuesta al impulso
$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} u(t)$$

Respuesta al escalón
$$s(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}\tau} u(\tau) d\tau = \left[1 - e^{-\frac{1}{RC}t} \right] u(t)$$

Ejemplo 1.- Calcular la respuesta $y(t)$ a la entrada $x(t)=u(t)-u(t-2)$ utilizando la convolución.

Suponemos que : $R=10K\Omega$ $C=100 \mu F$ $RC=1$

$$h(t) = e^{-t}u(t)$$



Convolución

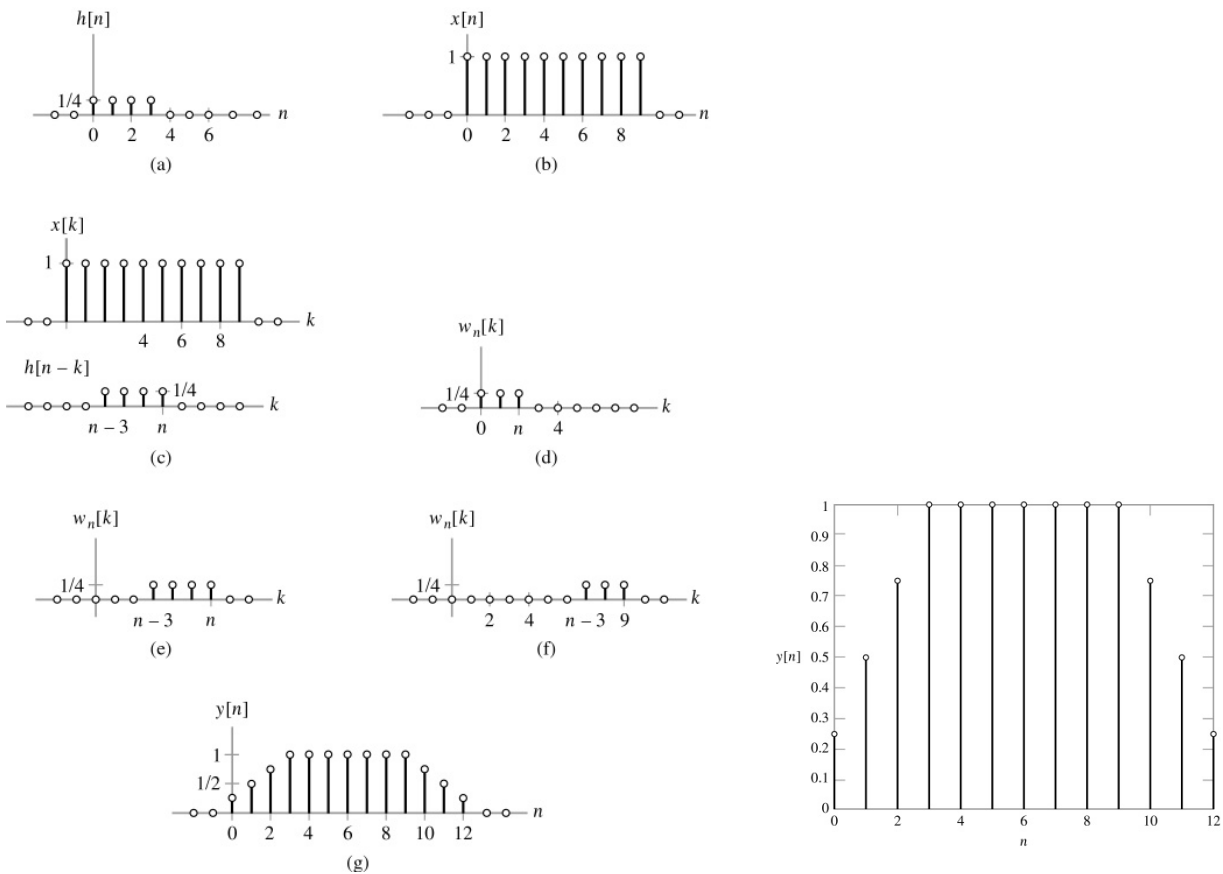
Recuerde que la sumatoria de convolución expresa la salida de un sistema en tiempo discreto en términos de la entrada y la respuesta al impulso del sistema. MATLAB tiene una función llamada **conv** que evalúa la convolución de señales en tiempo discreto de duración finita. Si **x** y **h** son vectores que representan señales, entonces el comando MATLAB **y=conv(x,h)** genera un vector **y** que representa la convolución de la señal representada por **x** y **h**. El número de elementos en **y** está dado por la suma del número de elementos en **x** y **h** menos uno. Advierta que debemos conocer el origen del tiempo de señales representadas por **x** y **h** para determinar el origen del tiempo de su convolución. En general, supongamos que el primero y el último elemento de **x** corresponde a los tiempos $n=k_x$ y $n=l_x$, respectivamente, mientras que el primero y el último elemento de **h** corresponde a los tiempos $n=k_h$ y $n=l_h$. Entonces el primero y último elemento de **y** corresponde a los tiempos $n=k_y=k_x+k_h$ y $n=l_y=l_x+l_h$. Observe que la longitud de $x[n]$ y $h[n]$ son $L_x=l_x-k_x+1$ y $L_h=l_h-k_h+1$. Así, la longitud de $y[n]$ es $L_y=l_y-k_y+1=L_x+L_h-1$.

Para ilustrar esto, consideremos el sistema definido por la ecuación en diferencias

$$y[n] = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 x[n-k]$$

Ante una entrada $x[n] = u[n] - u[n-10]$; $h[n] = \frac{1}{4}(u[n] - u[n-4])$

$$x[n] = [\dots, 0, \underset{0}{1}, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, \dots] \quad h[n] = [\dots, 0, \underset{0}{0.25}, 0.25, 0.25, 0.25, 0, \dots]$$



$k_h = 0, l_h = 3, k_x = 0, l_x = 9, \Rightarrow k_y = 0, l_y = 12, L_y = 13$
 Las señales h y x se definirían en MATLAB con los siguientes comandos :

```
>>h=0.25*ones(1,4);
>>x=ones(1,10);
```

La salida se obtendría y se dibujaría usando los comandos :

```
>>n=0:12;
>>y=conv(x,h);
>>stem(n,y); xlabel('n'); ylabel('y[n]')
```

$$x[n] = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

$$h[n] = [0,25 \ 0,25 \ 0,25 \ 0,25]$$

n 1 2 3 4 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 1 2 3 4
n 4 3 2 1

Xe[n]	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
hi[n]	0,25	0,25	0,25	0,25														
		0,25	0,25	0,25	0,25													
			0,25	0,25	0,25	0,25												
				0,25	0,25	0,25	0,25											
					0,25	0,25	0,25	0,25										
						0,25	0,25	0,25	0,25									
							0,25	0,25	0,25	0,25								
								0,25	0,25	0,25	0,25							
									0,25	0,25	0,25	0,25						
										0,25	0,25	0,25	0,25					
											0,25	0,25	0,25	0,25				
												0,25	0,25	0,25	0,25			
													0,25	0,25	0,25	0,25		
														0,25	0,25	0,25	0,25	
															0,25	0,25	0,25	0,25
																0,25	0,25	0,25

																			y[k]
Xe[n]*hi[n]	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0,25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,25
	0	0	0	0	0,25	0,25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,50
	0	0	0	0	0,25	0,25	0,25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,75
	0	0	0	0	0,25	0,25	0,25	0,25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0,25	0,25	0,25	0,25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	0,25	0,25	0,25	0,25	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	0	0,25	0,25	0,25	0,25	0	0	0	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	0	0	0,25	0,25	0,25	0,25	0	0	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,25	0,25	0,25	0,25	0	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,25	0,25	0,25	0,25	0	0	0	0	0,75
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,25	0,25	0,25	0	0	0	0	0,50
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,25	0,25	0,25	0	0	0	0,25
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,25	0,25	0,25	0,25	0	0

10. Función miconv

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

$$x[n] = \left[\dots, 0, \underbrace{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, \dots}_0 \right] \quad h[n] = \left[\dots, 0, \underbrace{0, 25, 0, 25, 0, 25, 0, 25, 0, \dots}_0 \right]$$

$$y[n] = \left[\dots, 0, \underbrace{0, 25, 0, 5, 0, 75, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 75, 0, 5, 0, 25, 0, \dots}_0 \right]$$

Representación en MATLAB

$$x(n)=[1,1,1,1,1,1,1,1,1,1], (n=1,\dots,10) \quad h(n)=[0.25,0.25,0.25,0.25], (n=1,\dots,4)$$

$$n = 1,\dots,13 \quad y(n) = \sum_{k=1}^n x(k)h(n+1-k)$$

$$y(n)=[0.25,0.5,0.75,1,1,1,1,1,1,0.75,0.5,0.25]$$

Las operaciones a realizar serían :

1) Invertir h[n], obteniendo hi[n]

hi=invertir(h);

function hi=invertir(h)

for i=1:length(h)

hi(i)=h(length(h)-i+1);

end

2) Extender x[n], obteniendo xe[n]

xe=[zeros(1,length(h)-1) x zeros(1,length(h))];

3) Ir desplazando hi[n] y multiplicando por xe[n]

for k=1:length(x)+length(h),

y(k)=sum(hi.*xe(k:k+length(h)-1));

end