

CAPITULO 4.- Aplicaciones de las representaciones de Fourier.

4.1 Introducción.

4.2 Respuesta en frecuencia de sistemas LTI.

4.3 Representaciones de señales periódicas mediante la transformada de Fourier.

4.4 Convolución y modulación con mezclas de señales de distintas clases.

4.5 Representación mediante la transformada de Fourier para señales en tiempo discreto.

4.6 Muestreo.

4.7 Reconstrucción de señales en tiempo continuo a partir de sus muestras.

4.8 Procesamiento en tiempo discreto de señales en tiempo continuo.

4.6 MUESTREO. (submuestreo)

* Muestreo de señales continuas

$$x(t) \xrightarrow{\text{muestreo}} x[n] = x(nT_s) \xleftarrow{FT}$$

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta(t - nT_s) \quad ; \quad x(t) \delta(t - nT_s) = x(nT_s) \delta(t - nT_s)$$

$$x_\delta(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \quad ; \quad p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \Rightarrow \text{tren de impulsos}$$

$$x_\delta(t) = x(t) p(t) \Rightarrow \text{muestreo mediante impulsos}$$

$$x_\delta(t) = x(t) p(t) \xleftarrow{FT} X_\delta(j\omega) \quad ; \quad P(j\omega) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k \frac{2\pi}{T_s})$$

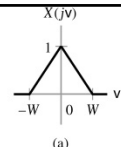
$$X_\delta(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

$$X_\delta(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s)) \quad ; \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

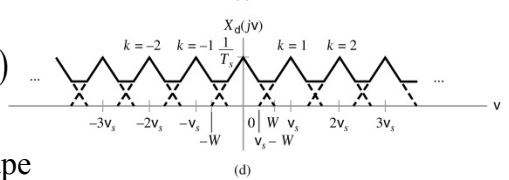
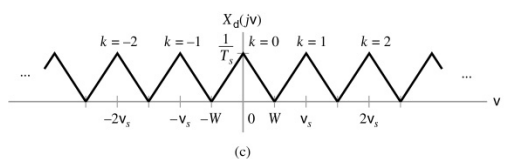
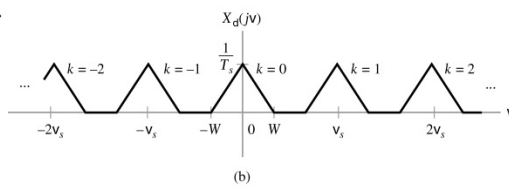
$$x[n] \xleftarrow{DTFT} X(e^{j\Omega}) = X_\delta(j\omega) |_{\omega=\Omega/T_s} \quad ; \quad \text{si } \omega = \omega_s \Rightarrow \Omega = 2\pi$$

Figure 4.22 (p. 364)

The FT of a sampled signal for different sampling frequencies. (a) Spectrum of continuous-time signal. (b) Spectrum of sampled signal when $\omega_s = 3W$. (c) Spectrum of sampled signal when $\omega_s = 2W$. (d) Spectrum of sampled signal when $\omega_s = 1.5W$.



$d \leftrightarrow \delta$
 $v \leftrightarrow \omega$
 $p \leftrightarrow \pi$

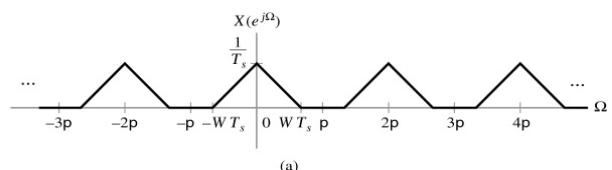


$$X_\delta(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$

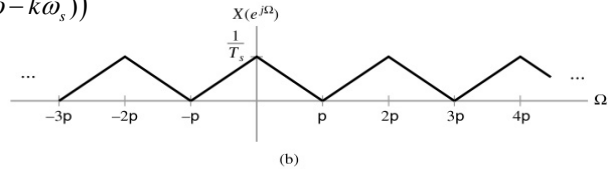
“aliasing” = traslape

Figure 4.23 (p. 365)

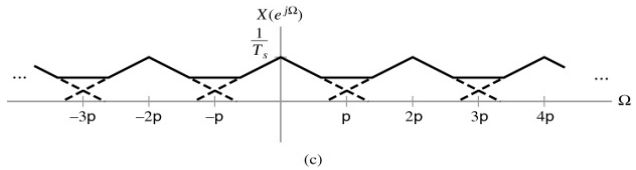
The DTFTs corresponding to the FTs depicted in Fig. 4-22 (b)-(d). (a) $\omega_s = 3W$. (b) $\omega_s = 2W$. (c) $\omega_s = 1.5W$.



$$X_\delta(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$



$d \leftrightarrow \delta$
 $v \leftrightarrow \omega$
 $p \leftrightarrow \pi$



Ejemplo 4.9 Muestreo de una senoide

Considere el efecto de muestrear la señal sinusoidal : $x(t) = \cos(\pi t)$

Determine la FT de la señal muestreada para los siguientes intervalos :

b) $T=1/4$, c) $T=1$, d) $T=3/2$.

$$x(t) = \cos(\omega t) \xrightarrow{FT} X(j\omega) = \pi\delta(\omega + \pi) + \pi\delta(\omega - \pi)$$

$$X_\delta(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$

$$X_\delta(j\omega) = \frac{\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\delta(\omega + \pi - k\omega_s) + \delta(\omega - \pi - k\omega_s))$$

$$b) \omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = 8\pi \quad ; \quad c) \omega_s = 2\pi \quad ; \quad d) \omega_s = 4\pi/3$$

Figure 4.24(p. 367)

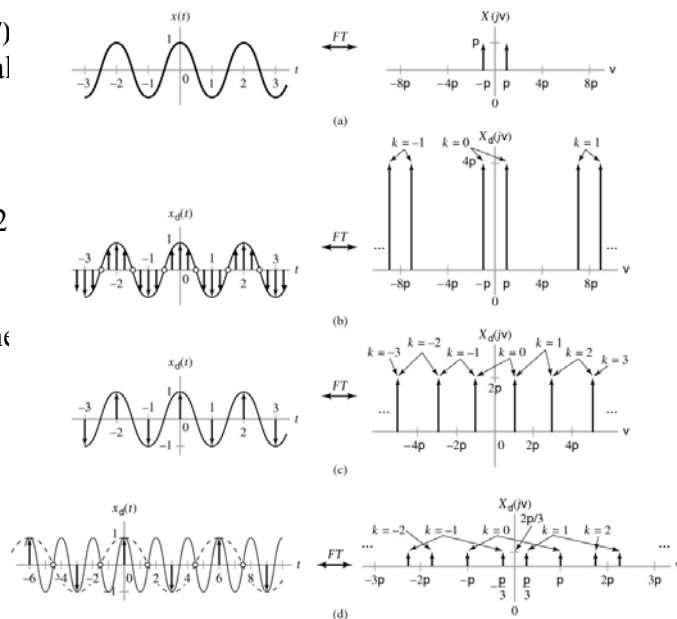
(a) Original signal and FT.

(b) FT for $T_s = 1/4$.

(c) FT for $T_s = 1$.

(d) FT for $T_s = 3/2$

A cosine of frequency $\pi/3$ is shown as the dashed line.



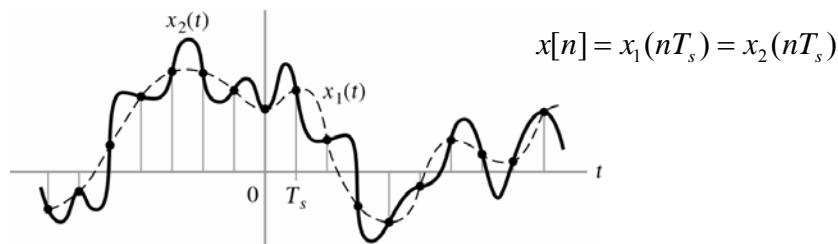
4.7 Reconstrucción de señales en tiempo continuo a partir de sus muestras

4.7.1 Teorema de muestreo



Condiciones que deben cumplirse para reconstruir en forma única una señal en tiempo continuo partiendo de sus muestras.

Herramienta : FT



Las muestras no nos dicen nada acerca del comportamiento de la señal entre los tiempos de muestreo.

4.7 (cont)

Correspondencia biunívoca representaciones dominios (t) y (ω)

Restricciones para la señal en tiempo continuo :

- transiciones suaves entre muestras –frecuencia máxima de la señal
 - banda limitada
- prevenir el efecto de traslape

Teorema de muestreo

“Si $x(t) \xrightarrow{FT} X(j\omega)$ representa una señal limitada en banda tal que

$$X(j\omega) = 0, \text{ para } |\omega| > \omega_m. \text{ Si } \omega_s > 2\omega_m, \text{ donde } \omega_s = 2\pi / T_s$$

es la frecuencia de muestro, entonces $x(t)$ está determinada únicamente por sus muestras $x(nT_s), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ “

$2\omega_m$ = velocidad de muestreo de Nyquist

ω_s = frecuencia de Nyquist (real)

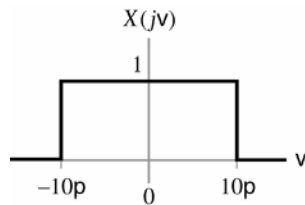
Filtro antitraslape : paso baja

Ejemplo 4.12

Supongamos que : $x(t) = \text{sen}(10\pi t) / (\pi t)$
 Determine el periodo de muestreo T_s , tal que $x(t)$ esté unívocamente representada por la señal en tiempo discreto $x[n]=x(n T_s)$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \text{sen}(10\pi t) / (\pi t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq 10\pi \\ 0 & |\omega| > 10\pi \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \omega_m &= 10\pi \\ \frac{2\pi}{T_s} &> 2\omega_m = 20\pi \\ T_s &< \frac{1}{10} = 0.1 \end{aligned}$$

4.7.2 Reconstrucción ideal

4.7 (cont_2)

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega) \quad ; \quad x_\delta(t) \xleftrightarrow{FT} X_\delta(j\omega)$$

$$\bullet X(j\omega) \Rightarrow X_\delta(j\omega) \quad ; \quad X_\delta(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$

$$h_r(t) \xleftrightarrow{FT} H_r(j\omega) \quad ; \quad H_r(j\omega) = \begin{cases} T_s, & |\omega| \leq \omega_s/2 \\ 0, & |\omega| > \omega_s/2 \end{cases}$$

$$h_r(t) = \frac{T_s \text{sen}\left(\frac{\omega_s t}{2}\right)}{\pi t} = \text{senc}\left(\frac{\omega_s t}{2\pi}\right) \quad ; \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

$$\bullet X_\delta(j\omega) \Rightarrow X(j\omega) \quad ; \quad X(j\omega) = H_r(j\omega)X_\delta(j\omega)$$

$$x(t) = h_r(t) * x_\delta(t) = h_r(t) * \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT_s) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]h_r(t - nT_s)$$

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n] \text{senc}\left(\frac{\omega_s}{2\pi}(t - nT_s)\right) \quad \text{interpolación limitada en banda ideal}$$

Sistema no causal, no puede implementarse

Figure 4.35 (p. 376)

Ideal reconstruction. (a) Spectrum of original signal. (b) Spectrum of sampled signal. (c) Frequency response of reconstruction filter.

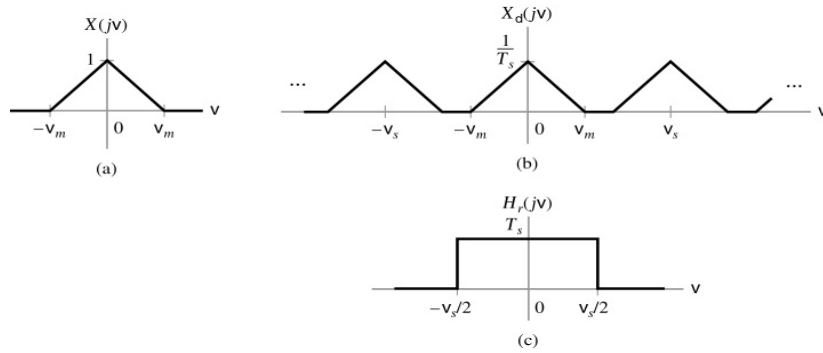
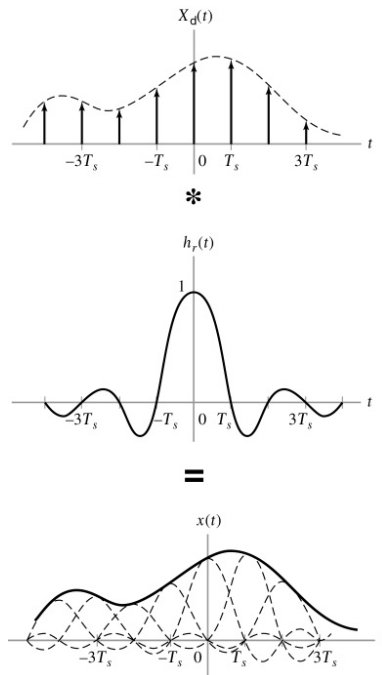
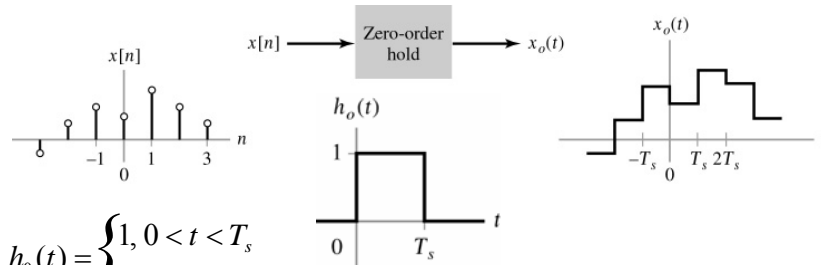


Figure 4.36 (p. 377)
Ideal reconstruction in the time domain.



4.7 (cont_3)

4.7.3 Reconstrucción práctica – Retenedor de orden cero



$$h_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T_s \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

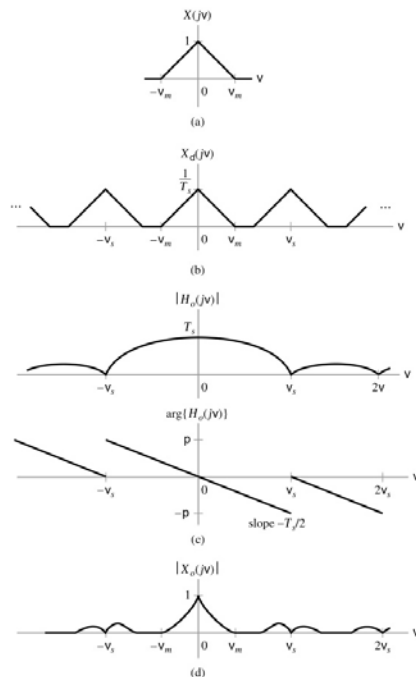
$$x_0(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]h_0(t - nT_s) = h_0(t) * \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT_s) = h_0(t) * x_\delta(t)$$

$$X_0(j\omega) = H_0(j\omega)X_\delta(j\omega)$$

$$h_0(t) \xrightarrow{FT} H_0(j\omega) = 2e^{-j\omega T_s/2} \frac{\text{sen}\left(\omega \frac{T_s}{2}\right)}{\omega}$$

Figure 4.39 (p. 379)
Effect of the zero-order hold in the frequency domain.

- (a) Spectrum of original continuous-time signal.
- (b) FT of sampled signal.
- (c) Magnitude and phase of $H_0(j\omega)$.
- (d) Magnitude spectrum of signal reconstructed using zero-order hold.



4.7 (cont_4)

El retenedor de orden cero introduce tres formas de modificación :

1. Corrimiento en fase lineal correspondiente a un retardo de $T_s/2$
2. La curvatura del lóbulo principal de $H_0(j\omega)$ distorsiona $X_s(j\omega)$ entre $-\omega_m$ y ω_m
3. Versiones distorsionadas y atenuadas de $X(j\omega)$ aparecen en $k\omega_s$

Al retener cada valor de $x[n]$ por T_s estamos introduciendo un corrimiento de $T_s/2$ en $x_0(t)$

Las transiciones abruptas en $x_0(t)$ sugieren la presencia de componentes de alta frecuencia (3.)

Las modificaciones (1.) y (2.) se reducen incrementando ω_s

Filtro antiimagen causal (de compensación)

Figure 4.40 (p. 380)

Frequency response of a compensation filter used to eliminate some of the distortion introduced by the zero-order hold.

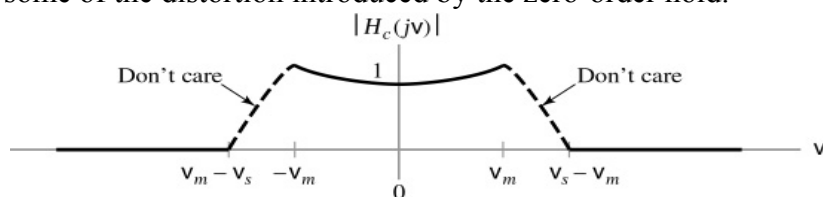
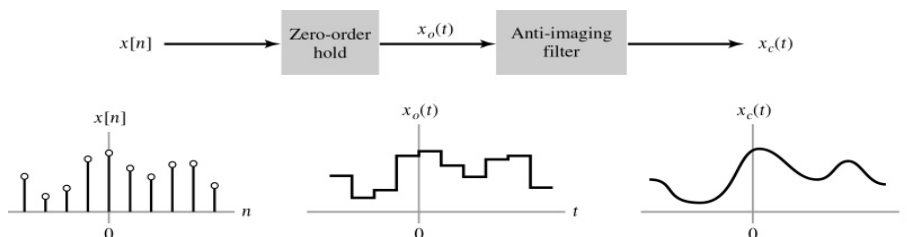


Figure 4.41 (p. 380)

Block diagram of a practical reconstruction system.



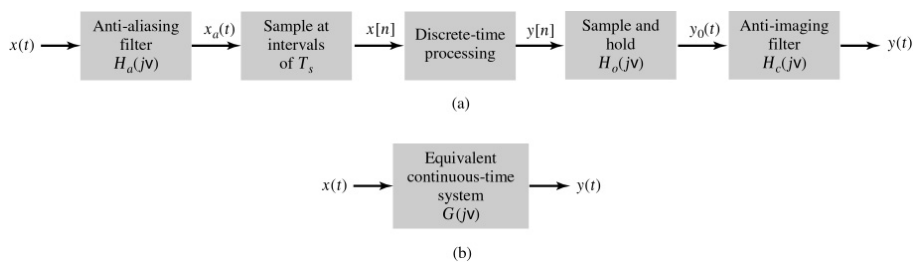
4.8 Procesamiento en tiempo discreto de señales en tiempo continuo

Métodos de Fourier

Ventajas (poder y flexibilidad de los computadores) :

1. Facilidad manipular señales
2. Fácil implementación (programa de ordenador)
3. Cambios en tiempo real

Sistema básico de procesamiento de señales en tiempo discreto



Tiempo	Periódica (t,n)	No periódica (t,n)	
Continua (t)	FS $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\omega_0 t}$ $X[k] = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$ x(t) periodo T $\Rightarrow \omega_0 = 2\pi/T$	FT $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$ $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$	No periódica (k,ω)
Discreta [n]	DTFS $x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} X[k] e^{jk\Omega_0 n}$ $X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$ x[n] y X[k] periodo N $\Rightarrow \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$	DTFT $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega$ $X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$ X(e ^{jΩ}) tiene periodo 2π	Periódica (k,Ω)
	Discreta (k)	Continua (ω,Ω)	Frecuencia

*** Relación entre la FT y la FS**

4.3 y 4.4 (res.)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow{FT} X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \delta(\omega - k\omega_0)$$

*** Relación entre la DTFT y la DTFS**

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{jk\Omega_0 n} \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\Omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \delta(\Omega - k\Omega_0)$$

*** Convolución de señales periódicas y no periódicas**

$$y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{FT} Y(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(jk\omega_0) X[k] \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$y[n] = x[n] * h[n] \xleftrightarrow{DTFT} Y(e^{j\Omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(e^{jk\Omega_0}) X[k] \delta(\Omega - k\Omega_0)$$

*** Modulación de señales periódicas y no periódicas**

$$y(t) = g(t)x(t) \xleftrightarrow{FT} Y(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] G(\omega - k\omega_0)$$

$$y[n] = x[n]g[n] \xleftrightarrow{DTFT} Y(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] G(e^{j(\Omega - k\Omega_0)})$$

Problema 4.17

Calcular la representación DTFT de la siguiente señal periódica :

$$x[n] = \cos\left[\frac{\pi}{8}n\right] + \text{sen}\left(\frac{\pi}{5}n\right)$$

Relación entre la DTFT y la DTFS $x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{jk\Omega_0 n} \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\Omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \delta(\Omega - k\Omega_0)$

$$x[n] = \frac{1}{2} [e^{j\frac{\pi}{8}n} + e^{-j\frac{\pi}{8}n}] + \frac{1}{2j} [e^{j\frac{\pi}{5}n} - e^{-j\frac{\pi}{5}n}]$$

$$\Omega_0 = \text{lcm}\left(\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{40} \quad \begin{array}{l} \pi/8=5 \quad 2 \pi/80 \\ \pi/5=8 \quad 2 \pi/80 \end{array}$$

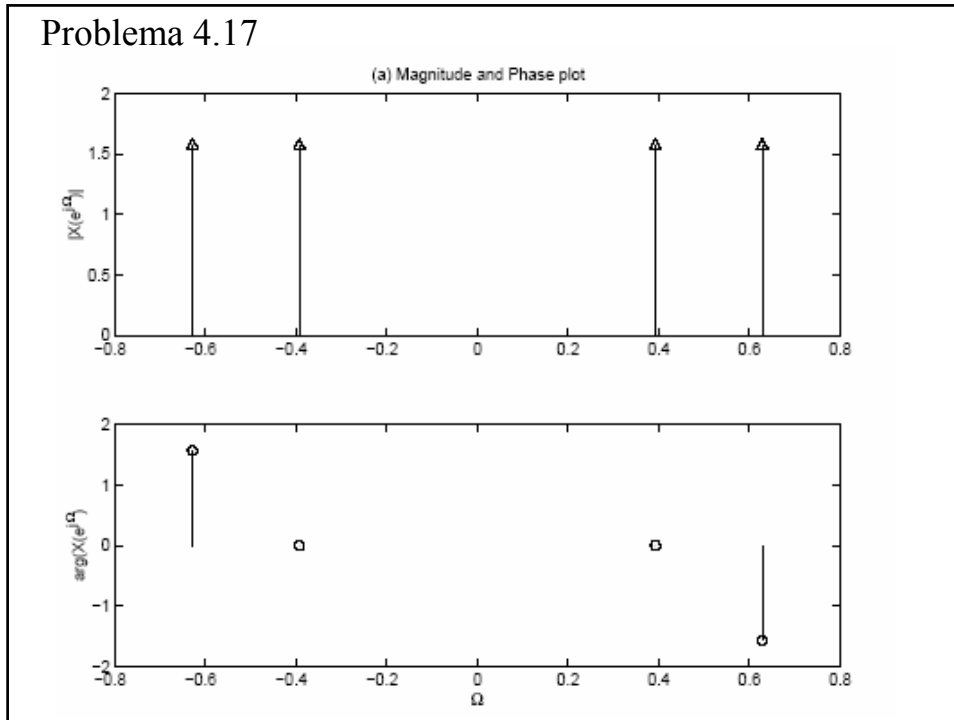
$$X[5] = X[-5] = \frac{1}{2}$$

$$X[8] = -X[-8] = \frac{1}{2j}$$

$$X(e^{j\Omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \delta(\Omega - k\Omega_0)$$

$$X(e^{j\Omega}) = \pi \left[\delta\left(\Omega - \frac{\pi}{8}\right) + \delta\left(\Omega + \frac{\pi}{8}\right) \right] + \frac{\pi}{j} \left[\delta\left(\Omega - \frac{\pi}{5}\right) - \delta\left(\Omega + \frac{\pi}{5}\right) \right]$$

Problema 4.17



Problema 4.16

4.16. Find the FT representations for the following periodic signals: Sketch the magnitude and phase spectra.

(a) $x(t) = 2 \cos(\pi t) + \sin(2\pi t)$

* Relación entre la FT y la FS $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\omega_0 t} \xrightarrow{FT} X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \delta(\omega - k\omega_0)$

$$\begin{aligned} \pi &= 1 \cdot 2\pi/2 \\ 2\pi &= 2 \cdot 2\pi/2 \end{aligned}$$

$$x(t) = e^{j\pi t} + e^{-j\pi t} + \frac{1}{2j} e^{j2\pi t} - \frac{1}{2j} e^{-j2\pi t}$$

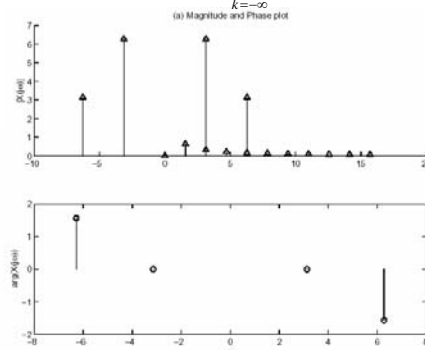
$$\omega_0 = \text{lcm}(\pi, 2\pi) = \pi$$

$$x[1] = x[-1] = 1$$

$$x[2] = -x[-2] = \frac{1}{2j}$$

$$X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$X(j\omega) = 2[\pi\delta(\omega - \pi) + \pi\delta(\omega + \pi)] + \frac{1}{j} [\pi\delta(\omega - 2\pi) - \pi\delta(\omega + 2\pi)]$$



Problema 4.22

4.22. The input to a discrete-time system is given by

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{8}n\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right)$$

Use the DTFT to find the output of the system, $y[n]$, for the following impulse responses $h[n]$, first note that

$$X(e^{j\Omega}) = \pi \left[\delta\left(\Omega - \frac{\pi}{8}\right) + \delta\left(\Omega + \frac{\pi}{8}\right) \right] + \frac{\pi}{j} \left[\delta\left(\Omega - \frac{3\pi}{4}\right) - \delta\left(\Omega + \frac{3\pi}{4}\right) \right]$$

(a) $h[n] = \frac{\sin(\frac{\pi}{4}n)}{\pi n}$

$$H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1 & |\Omega| \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 & \frac{\pi}{4} \leq |\Omega| < \pi, 2\pi \text{ periodic.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} Y(e^{j\Omega}) &= H(e^{j\Omega})X(e^{j\Omega}) \\ &= \pi \left[\delta\left(\Omega - \frac{\pi}{8}\right) + \delta\left(\Omega + \frac{\pi}{8}\right) \right] \end{aligned}$$

$$y[n] = \cos\left(\frac{\pi}{8}n\right)$$