CAPITULO 3.- Representaciones de Fourier para señales.

3.1 Introducción.

Análisis de Fourier :
Representación de señales utilizando senoides complejas

Senoides complejas y respuesta en frecuencia de sistemas LTI

$$x(t) = e^{j\omega t} \quad \textit{senoidal compleja}$$

$$y(t) = H(j\omega)e^{j\omega t} \quad ; \quad H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \Rightarrow resp.\, en\;\, frecuencia$$

$$y(t) = |H(j\omega)|e^{j\left(\omega t + \arg\{H(j\omega)\}\right)}$$

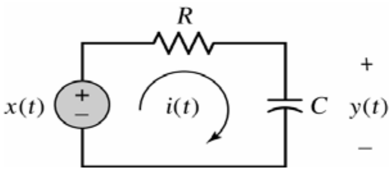
$$x[n] = e^{j\Omega n}$$

$$y[n] = H(e^{j\Omega})e^{j\Omega n} \quad ; \quad H(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\left(e^{j\Omega}\right)^{-k}$$

$$y[n] = |H(e^{j\Omega})|e^{j\left(\Omega n + \arg\{H(e^{j\Omega})\}\right)}$$

Ejemplo Circuito RC : Respuesta en frecuencia

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} u(t) \quad , \quad \forall t \geq 0$$



$$H(j\omega) = \frac{1/RC}{j\omega + 1/RC} = \frac{1}{j\omega RC + 1}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1/RC}{\sqrt{\omega^2 + \left(1/RC\right)^2}}$$

$$\arg\{H(j\omega)\} = -\arctan(\omega RC)$$

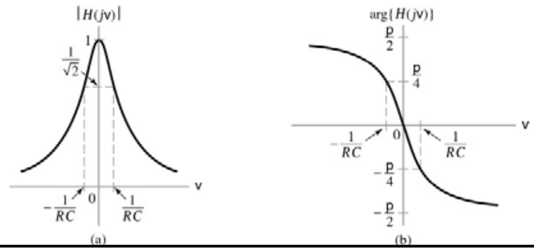
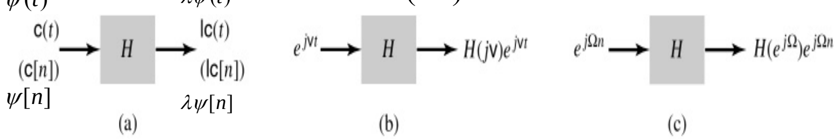


Figure 3.4 (p. 198)

(a) General eigenfunction $\Psi(t)$ or $\Psi[n]$ and eigenvalue λ.

(b) Complex sinusoidal eigenfunction $e^{j\omega t}$ and eigenvalue $H(j\omega)$.

(c) Complex sinusoidal eigenfunction $e^{j\Omega n}$ and eigenvalue $H(e^{j\Omega})$.



Función característica de H **Función propia**	**Problema de valores característicos**	**Valor característico** **Valor propio**
$\psi(t) = e^{j\omega t}$	$H\{\psi(t)\} = \lambda\psi(t)$	$H(j\omega) = \lambda$
Vector característico de A		**Valor característico**
$\mathrm{e_k}$	$\mathrm{Ae_k} = \lambda_k \mathrm{e_k}$	λ_k

$$x(t) = \sum_{k=1}^{M} a_k e^{j\omega_k t} \qquad y(t) = \sum_{k=1}^{M} a_k H(y\omega_k) e^{j\omega_k t}$$

Representaciones de Fourier para cuatro clases de señales

Propiedad de tiempo	**Periódica**	**No periódica**
Continua	Serie de Fourier (FS)	Transformada de Fourier (FT)
Discreta	Serie de Fourier en tiempo discreto (DTFS)	Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT)

Señales periódicas: representaciones mediante las series de Fourier

DTFS : Periodo fundamental de x[n] : N $\Rightarrow \Omega_0 = 2\pi/N$

FS : Periodo fundamental de x(t) : T $\Rightarrow \omega_0 = 2\pi/T$

3.2 Señales periódicas en tiempo discreto: la serie de Fourier en tiempo discreto (DTFS).

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} X[k] e^{jk\Omega_0 n} \qquad X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

$$x[n] \overset{DTFS:\Omega_0}{\longleftrightarrow} X[k]$$

X[k],x[n] : par DTFS

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} \qquad \langle N \rangle = 0,1,\ldots,N-1 \qquad \langle N \rangle = -\frac{N}{2},\ldots,\frac{N}{2}-1$$

$X[k]$ Representación en el dominio de la frecuencia

$|X[k]|$ Espectro de magnitud de x[n]

$\arg\{X[k]\}$ Espectro de fase de x[n]

$$X[k+N] = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-j(k+N)\Omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jN\Omega_0 n} e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} = X[k]$$

X[k] y x[n] : evaluar en computadora (únicas)

Problema 3.48

Utilice la definición de los coeficientes de la DTFS para evaluar la representación DTFS para la señal :

$$x[n] = \cos\left(\frac{6\pi}{17} n + \frac{\pi}{3}\right) \qquad x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} X[k] e^{jk\Omega_0 n}$$

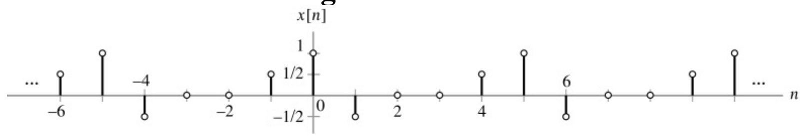
$$N = 17, \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{17} \qquad X[k] = \frac{1}{N} \sum_{k=-8}^{8} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2}\left(e^{j\left(\frac{6\pi}{17}n + \frac{\pi}{3}\right)} + e^{-j\left(\frac{6\pi}{17}n + \frac{\pi}{3}\right)} \right) = \left[\frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{3}}\right] e^{j(3)\frac{2\pi}{17}n} + \left[\frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{3}}\right] e^{j(-3)\frac{2\pi}{17}n}$$

$$X[k] = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{3}} & k = 3 \\ \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{3}} & k = -3 \\ 0 & otros\ k, -8 \le k \le 8 \end{cases}$$

Problema 3.2

Encontrar la representación en el dominio de la frecuencia de la señal descrita en la figura



x[-n]=-x[n] : simetría impar ; N=5 , $\Omega_0=2\pi/5$

$$X[k]=\frac{1}{5}\sum_{n=-2}^{2}x[n]e^{-jk2\pi n/5}=\frac{1}{5}\left\{x[-2]e^{jk4\pi/5}+x[-1]e^{jk2\pi/5}+x[0]e^{j0}+x[1]e^{-jk2\pi/5}+x[2]e^{-jk4\pi/5}\right\}$$

$$X[k]=\frac{1}{5}\left\{\frac{1}{2}e^{jk2\pi/5}+1-\frac{1}{2}e^{-jk2\pi/5}\right\}=\frac{1}{5}\left\{1+j\,sen(k2\pi/5)\right\}$$

$$X[-2]=\frac{1}{5}-j\frac{sen(4\pi/5)}{5}=0{,}232e^{-j0{,}531} \quad ; \quad X[-1]=\frac{1}{5}-j\frac{sen(2\pi/5)}{5}=0{,}276e^{-j0{,}760}$$

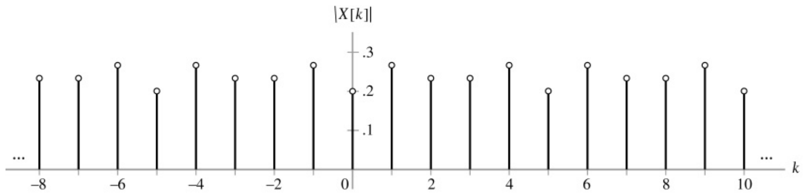
$$X[0]=\frac{1}{5}=0{,}2e^{j0}$$

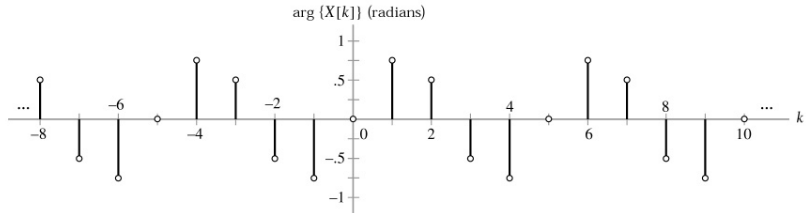
$$X[1]=\frac{1}{5}+j\frac{sen(2\pi/5)}{5}=0{,}276e^{j0{,}760} \quad ; \quad X[2]=\frac{1}{5}+j\frac{sen(4\pi/5)}{5}=0{,}232e^{j0{,}531}$$

Problema 3.2 (cont.)

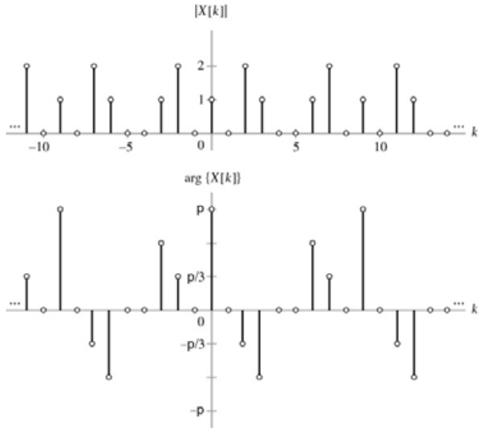
$$X[-2]=0{,}232e^{-j0{,}531} \quad ; \quad X[-1]=0{,}276e^{-j0{,}760} \quad ; \quad X[0]=0{,}2e^{j0}$$

$$X[1]=0{,}276e^{j0{,}760} \quad ; \quad X[2]=0{,}232e^{j0{,}531}$$





Ejemplo 3.5 (Inversa de DTFS)
Determine la señal en el dominio del tiempo x[n] a partir de los coeficientes DTFS descritos en la figura :



N=9 ,
$\Omega_0=2\pi/9$

$$x[n]=\sum_{k=-4}^{4} X[k]e^{jk2\pi n/9}=e^{j2\pi/3}e^{-j6\pi n/9}+2e^{j\pi/3}e^{-j4\pi n/9}-1+2e^{-j\pi/3}e^{j4\pi n/9}+e^{-j2\pi/3}e^{j6\pi n/9}$$

$$x[n]=2\cos(6\pi n/9-2\pi/3)+4\cos(4\pi n/9-\pi/3)-1$$

3.3 Señales periódicas en tiempo continuo: la serie de Fourier
a) FS exponencial

FS : Periodo fundamental de x(t) : T $\Rightarrow \omega_0 = 2\pi/T$

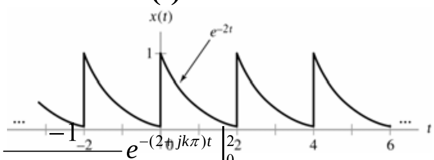
FS exponencial

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]e^{jk\omega_0 t} \quad ; \quad X[k]=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \quad ;$$

$$x(t) \overset{FS;\omega_0}{\leftrightarrow} X[k]$$ X[k],x[n] : par FS

$X[k]$	Representación en el dominio de la frecuencia
$\lvert X[k]\rvert$	Espectro de magnitud de x[n]
$\arg\{X[k]\}$	Espectro de fase de x[n]

Ejemplo 3.9 (Cálculo directo de coeficientes FS)
Determine los coeficientes FS para la señal x(t) descrita en la figura :

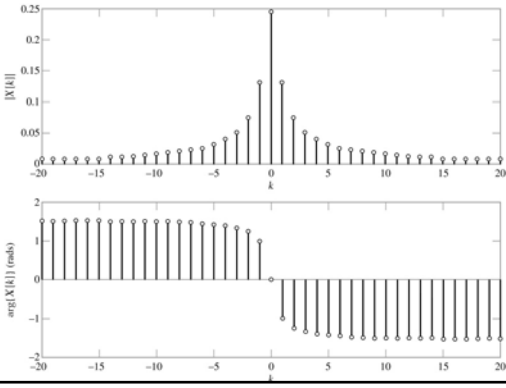


$$\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi/2 = \pi$$

$$X[k] = \frac{1}{2}\int_0^2 e^{-2t} e^{-jk\pi t}dt = \frac{1}{2}\int_0^2 e^{-(2+jk\pi)t}dt = \frac{-1}{2(2+jk\pi)} e^{-(2+jk\pi)t}\Big|_0^2$$

$$X[k] = \frac{1}{4+jk2\pi)}(1-e^{-4}e^{-jk2\pi})$$

$$X[k] = \frac{1-e^{-4}}{4+jk2\pi)}$$



Ejemplo 3.12 (Inversa FS)
Encuentre la señal en el dominio del tiempo x(t) correspondiente a los coeficientes FS :

$$X[k] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{|k|} e^{jk\pi/20}$$

Suponiendo que el periodo fundamental es T=2 $\Rightarrow \omega_0 = 2\pi/T = \pi$

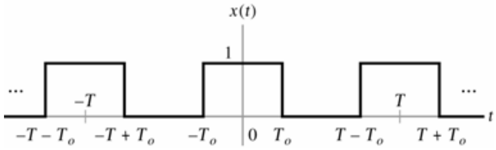
$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k} e^{jk\pi/20}e^{jk\pi t} + \sum_{k=-1}^{-\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{-k} e^{jk\pi/20}e^{jk\pi t}$$

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k} e^{jk\pi/20}e^{jk\pi t} + \sum_{l=1}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{l} e^{-jl\pi/20}e^{-jl\pi t}$$

$$x(t) = \frac{1}{1-(1/2)e^{j(\pi t+\pi/20)}} + \frac{1}{1-(1/2)e^{-j(\pi t+\pi/20)}} - 1$$

$$x(t) = \frac{3}{5-4\cos(\pi t+\pi/20)}$$

Ejemplo 3.13 (FS para una onda cuadrada)
Determine la representación FS de la onda cuadrada x(t) descrita en la figura :



$$X[k]=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\int_{-T_0}^{T_0}e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{-1}{Tjk\omega_0}e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{-T_0}^{T_0} \quad , \quad k\neq 0$$

$$X[k]=\frac{2}{Tk\omega_0}\left(\frac{e^{jk\omega_0 T_0}-e^{-jk\omega_0 T_0}}{2j}\right)=\frac{2sen(k\omega_0 T_0)}{Tk\omega_0} \quad , \quad k\neq 0$$

$$k=0\Rightarrow X[k]=\frac{1}{T}\int_{-T_0}^{T_0}dt=\frac{2T_0}{T} \quad ; \quad \lim_{k\to 0}\frac{2sen(k\omega_0 T_0)}{Tk\omega_0}=\frac{2T_0}{T}$$

$$X[k]=\frac{2sen(k\omega_0 T_0)}{Tk\omega_0}$$

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad X[k]=\frac{2sen(k2\pi T_0/T)}{k2\pi}=\frac{2T_0}{T}senc\left(k\frac{2T_0}{T}\right)$$

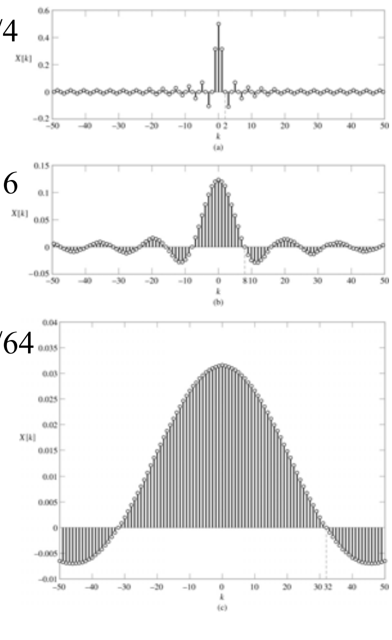
Ejemplo 3.13 (cont.)

$X[k], \quad -50\le k\le 50$

$T_0/T=1/4$

$T_0/T=1/16$

$T_0/T=1/64$

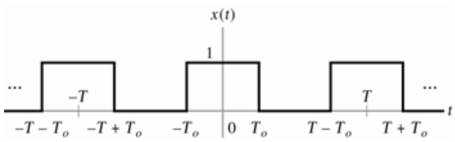


La energía en la representación FS esta distribuida en un ancho intervalo de frecuencias

El primer cruce por cero :

$T_0/T=1/4$	k=2
$T_0/T=1/16$	k=8
$T_0/T=1/64$	k=32

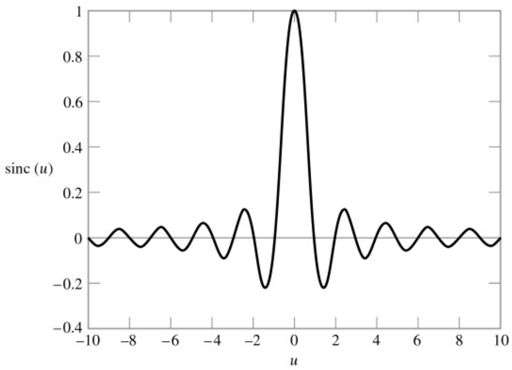
Al decrecer T_0/T la energía en cada periodo de la señal onda cuadrada se concentra alrededor de un estrecho intervalo de tiempo.



3.3

Con bastante frecuencia en el análisis de Fourier aparece la forma funcional :

$$senc(u) = \frac{sen(\pi u)}{\pi u}$$



$$senc(0) = 1$$

$$senc(ku) = 0 \, , k \neq 0$$

El máximo de la función es la unidad en u=0

El cruce por cero ocurre en los valores enteros de u

Lóbulo principal de la función senc : parte de la función entre los cruces por cero en u=+1 y u=-1

Lóbulos laterales : resto de lóbulos

3.3 Señales periódicas en tiempo continuo: la serie de Fourier b) FS trigonométrica

$$X[-k] = X[k]$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\omega_0 t} = X[0] + \sum_{m=1}^{\infty} \left(X[m] e^{jm\omega_0 t} + X[-m] e^{-jm\omega_0 t} \right) =$$

$$x(t) = X[0] + \sum_{m=1}^{\infty} 2X[m] \frac{e^{jm\omega_0 t} + e^{-jm\omega_0 t}}{2} = X[0] + \sum_{m=1}^{\infty} 2X[m]\cos(m\omega_0 t)$$

$$si \; B[0] = X[0] \quad y \quad B[k] = 2X[k], k \neq 0, \; entonces$$

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} B[k]\cos(k\omega_0 t)$$

3.3 Señales periódicas en tiempo continuo: la serie de Fourier
b) FS trigonométrica

$$x(t) = B[0] + \sum_{k=1}^{\infty} \{ B[k]\cos(k\omega_0 t) + A[k]sen(k\omega_0 t) \}$$

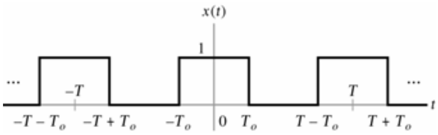
$$B[0] = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$$

$$k \neq 0, \quad B[k] = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(k\omega_0 t)dt \quad = \quad X[k] + X[-k]$$

$$A[k] = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)sen(k\omega_0 t)dt \quad = \quad j\left(X[k] - X[-k]\right)$$

exponencial : $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]e^{jk\omega_0 t}$; $X[k] = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$;

Ejemplo 3.13 (FS trigonométrica para una onda cuadrada)



$$\omega_0 = 2\pi/T$$

$$B[0] = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = \frac{1}{T}\left[\int_0^{T_0} 1dt + \int_{T-T_0}^{T} 1dt\right] = \frac{2T_0}{T}$$

$$k \neq 0, \quad B[k] = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(k\omega_0 t)dt = \frac{2sen(k2\pi T_0/T)}{k\pi}$$

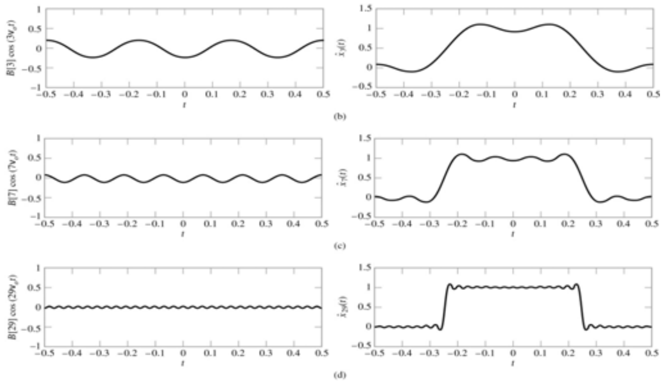
$$A[k] = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)sen(k\omega_0 t)dt = 0$$

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} B[k]\cos(k\omega_0 t) \quad ; \quad \hat{x}_j(t) = \sum_{k=0}^{j} B[k]\cos(k\omega_0 t)$$

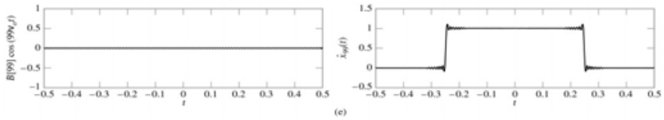
$$T = 1\,;\, \omega_0 = 2\pi/T\,;\, T_0/T = 1/4$$

Figure 3.25b-3 (p. 226)

(b) $J = 3$. (c) $J = 7$. (d) $J = 29$.



(e) $J = 99$.



3.4 Señales no periódicas en tiempo discreto: La transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT)

De manera intuitiva deduciremos DTFT a partir de DTFS, describiendo una señal no periódica como el límite de una señal periódica cuyo periodo N se acerca a infinito.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\Omega}\right)e^{j\Omega n}d\Omega \qquad x[n] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X\left(e^{j\Omega}\right)$$

$$X\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$ Representación en el dominio de la frecuencia

Si x[n] duración infinita, ha de ser absolutamente sumable para que exista la DTFT : $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x[n]\right| < \infty$

Si x[n] no es absolutamente sumable, pero tiene energia finita, la DTFT converge en un sentido de error cuadrático medio, pero no converge puntualmente $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x[n]\right|^{2} < \infty$

La señal escalón unitario u[n] no cumple las condiciones anteriores

Ejemplo 3.17 Secuencia exponencial
Encuentre la DTFT de la secuencia x[n]=αⁿu[n]

$$X\left(e^{j\Omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\Omega n}$$

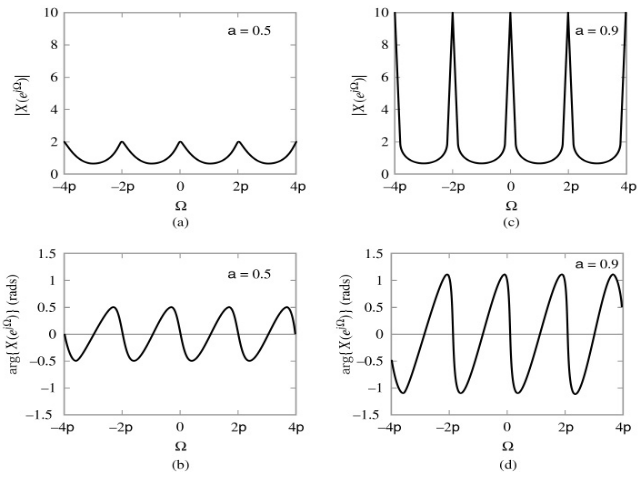
$$X\left(e^{j\Omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha^{n}u[n]e^{-j\Omega n}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n}e^{-j\Omega n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\alpha e^{-j\Omega}\right)^{n}=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}},\quad |\alpha|<1$$

$$si\ \alpha\ es\ real\quad :\quad X\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1}{1-\alpha\cos\Omega+j\alpha sen\Omega}$$

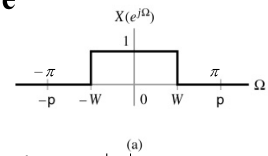
$$\left|X\left(e^{j\Omega}\right)\right|=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\alpha\cos\Omega\right)^{2}+\alpha^{2}sen^{2}\Omega}}=\frac{1}{\sqrt{\alpha^{2}+1-2\alpha\cos\Omega}}\quad ;\quad par$$

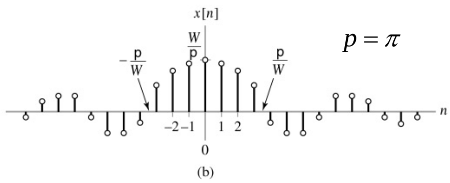
$$\arg\left\{X\left(e^{j\Omega}\right)\right\}=-\arctan\left(\frac{\alpha sen\Omega}{1-\alpha\cos\Omega}\right)\quad ;\quad impar$$

Figure 3.29 (p.232) Ejemplo 3.17 (cont.)
The DTFT of an exponential signal $x[n] = (\alpha)^{n}u[n]$. (a) Magnitude spectrum for $\alpha = 0.5$. (b) Phase spectrum for $\alpha = 0.5$. (c) Magnitude spectrum for $\alpha = 0.9$. (d) Phase spectrum for $\alpha = 0.9$.



Eje





$p = \pi$

$$X\left(e^{j\Omega}\right) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < W \\ 0, & W < |\Omega| < \pi \end{cases}$$; $X\left(e^{j\Omega}\right)$ está especificada sólo para :$-\pi < \Omega < \pi$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi n j} e^{j\Omega n} \Big|_{-W}^{W} = \frac{1}{\pi n} sen(Wn), \quad n \neq 0$$

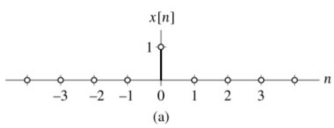
$$n = 0 \Rightarrow x[0] = \lim_{n\to 0} \frac{1}{\pi n} sen(Wn) = \frac{W}{\pi}$$

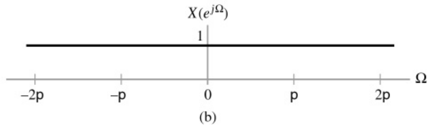
$$x[n] = \frac{1}{\pi n} sen(Wn) = \frac{W}{\pi} senc\left(\frac{Wn}{\pi}\right)$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\Omega}\right) e^{j\Omega n} d\Omega$$

Ejemplo 3.20 DTFT del impulso unitario : δ(t)

$$X\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j\Omega n} = 1 \qquad \delta[n] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} 1$$



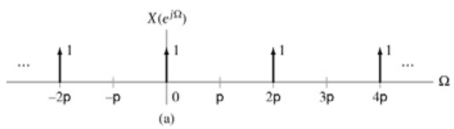


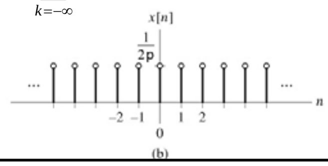
Ejemplo 3.21 Inversa DTFT del espectro impulso unitario : δ(Ω)

$$X\left(e^{j\Omega}\right) = \delta(\Omega), -\pi < \Omega < \pi$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi}$$ utilizando la propiedad de filtrado de la función impulso

$$\frac{1}{2\pi} \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \delta[\Omega], \quad -\pi < \Omega < \pi \qquad X\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k2\pi)$$





3.5 Señales no periódicas en tiempo continuo : La transformada de Fourier (FT)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \qquad x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(j\omega)$$

$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$ representación en el dominio de la frecuencia

La convergencia puntual está garantizada en todos los valores de t excepto en aquellos correspondientes a discontinuidades si x(t) satisface las **CONDICIONES DE DIRICHLET** : (para señales no periódicas)

1.- x(t) es absolutamente integrable. $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|dt < \infty$

2.- x(t) tiene un número finito de máximos, mínimos y discontinuidades locales en todo intervalo finito.

3.- el tamaño de cada discontinuidad es finito.

La función escalón no es absolutamente integrable

Ejemplo 3.25 Pulso rectangular

Considere el pulso rectangular descrito en la figura y definido como : $x(t) = \begin{cases} 1, & -T_0 \le t \le T_0 \\ 0, & |t| > T_0 \end{cases}$ **Encuentre la FT de x(t)**

El pulso rectangular x(t) es absolutamente integrable, siempre que

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}d\omega = \int_{-T_0}^{T_0} e^{-j\omega t}d\omega = \frac{-1}{j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{-T_0}^{T_0} = \frac{2}{\omega}sen(\omega T_0),\ \omega \neq 0$$

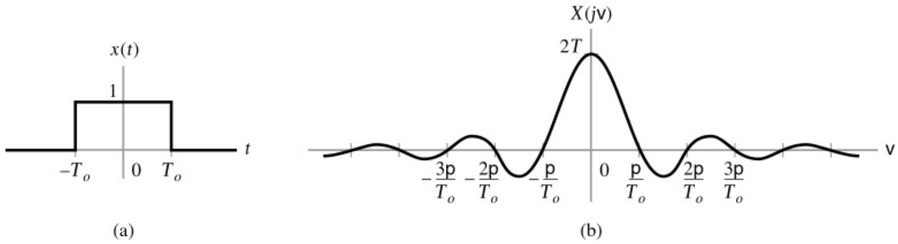
$$\omega = 0 \Rightarrow X(j0) = \lim_{\omega \to 0}\frac{2}{\omega}sen(\omega T_0) = 2T_0$$

$$|X(j\omega)| = 2\left|\frac{sen(\omega T_0)}{\omega}\right| \quad ; \quad \arg\{X(j\omega)\} = \begin{cases} 0, & \frac{sen(\omega T_0)}{\omega} > 0 \\ \pi, & \frac{sen(\omega T_0)}{\omega} < 0 \end{cases}$$

$$X(j\omega) = 2Tsenc\left(\frac{\omega T_0}{\pi}\right)$$

Ejemplo 3.25 (cont.)

$$|X(j\omega)| = 2\left|\frac{sen(\omega T)}{\omega}\right|$$



Si To aumenta
señal x(t) se dispersa en el origen en el dominio t

Si π/To disminuye
señal X(jω) se dispersa en el origen en el dominio ω

Ejemplo 3.27 Impulso unitario
Encuentre la FT de x(t)=δ(t)

X(t) no satisface las condiciones de Dirichlet, a pesar de ello

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} d\omega = 1 \qquad \delta(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} 1 \quad ; \quad -\infty < \omega < \infty$$

Ejemplo 3.28 Inversa FT de un espectro impulso
Encuentre la inversa FT de $X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega)$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = 1 \qquad 1 \overset{FT}{\leftrightarrow} 2\pi\delta(\omega)$$

3.6 Propiedades de las representaciones de Fourier

3.6.0 Perioricidad
3.6.1 Linealidad
3.6.2 Simetría – Señales reales e imaginarias
3.6.2 Simetría – Pares e impares
3.6.3 Corrimiento en el tiempo
3.6.4 Corrimiento en frecuencia
3.6.4 Escalamiento
3.6.5 Diferenciación e integración, sumatoria y dif.
3.6.6 Convolución y modulación
3.6.7 Filtrado. Modulación en frecuencia
3.6.8 Relación de Parseval
3.6.9 Dualidad
3.6.10 Producto tiempo-ancho de banda

Tabla

Tiempo	Periódica (t,n)	No periódica (t,n)	
Continua (t)	**Serie de Fourier** $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\omega_0 t}$ $X[k] = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$ x(t) periodo T $\Rightarrow \omega_0 = 2\pi/T$	**Tranformada de Fourier** $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$ $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$	**No periódica (k,ω)**
Discreta [n]	**Serie Fourier Tiempo Discr.** $x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} X[k] e^{jk\Omega_0 n}$ $X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$ x[n] y X[k] periodo N $\Rightarrow \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$	**Tranf. Fourier Tiempo Discr.** $x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega$ $X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$ $X(e^{j\Omega})$ tiene periodo 2π	**Periódica (k,Ω)**
	Discreta (k)	**Continua (ω,Ω)**	**Frecu-encia**

3.6.0 Perioricidad

3.6.1 Linealidad

$$z(t) = ax(t) + by(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} Z(j\omega) = aX(j\omega) + bY(j\omega)$$

$$z(t) = ax(t) + by(t) \overset{FS;\omega_0}{\leftrightarrow} Z[k] = aX[k] + bY[k]$$

$$z[n] = ax[n] + by[n] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} Z(e^{j\Omega}) = aX(e^{j\Omega}) + bY(e^{j\Omega})$$

$$z[n] = ax[n] + by[n] \overset{DTFS;\Omega_0}{\leftrightarrow} Z[k] = aX[k] + bY[k]$$

3.6.2 Simetría – Señales reales e imaginarias puras

a) x(t) Real

Representación	Forma compleja	Forma rectangular
FT	$X(j\omega) = X(-j\omega)$	$\mathrm{Re}\{X(j\omega)\} = \mathrm{Re}\{X(-j\omega)\}$ $\mathrm{Im}\{X(j\omega)\} = -\mathrm{Im}\{X(-j\omega)\}$
FS	$X^*[k] = X[-k]$	$\mathrm{Re}\{X[k]\} = \mathrm{Re}\{X[-k]\}$ $\mathrm{Im}\{X[k]\} = -\mathrm{Im}\{X[-k]\}$
DTFT	$X^*(e^{j\Omega}) = X(e^{-j\Omega})$	$\mathrm{Re}\{X(e^{j\Omega})\} = \mathrm{Re}\{X(e^{-j\Omega})\}$ $\mathrm{Im}\{X(e^{j\Omega})\} = -\mathrm{Im}\{X(e^{-j\Omega})\}$
DTFS	$X^*[k] = X[-k]$	$\mathrm{Re}\{X[k]\} = \mathrm{Re}\{X[-k]\}$ $\mathrm{Im}\{X[k]\} = -\mathrm{Im}\{X[-k]\}$

3.6.2(cont.) Simetría – Señales reales e imaginarias puras

b) x(t) Imaginaria pura

Representación	Forma compleja	Forma rectangular
FT	$X(j\omega) = -X(-j\omega)$	$\mathrm{Re}\{X(j\omega)\} = -\mathrm{Re}\{X(-j\omega)\}$ $\mathrm{Im}\{X(j\omega)\} = \mathrm{Im}\{X(-j\omega)\}$
FS	$X^*[k] = -X[-k]$	$\mathrm{Re}\{X[k]\} = -\mathrm{Re}\{X[-k]\}$ $\mathrm{Im}\{X[k]\} = -\mathrm{Im}\{X[-k]\}$
DTFT	$X^*(e^{j\Omega}) = -X(e^{-j\Omega})$	$\mathrm{Re}\{X(e^{j\Omega})\} = -\mathrm{Re}\{X(-e^{j\Omega})\}$ $\mathrm{Im}\{X(e^{j\Omega})\} = \mathrm{Im}\{X(-e^{j\Omega})\}$
DTFS	$X^*[k] = -X[-k]$	$\mathrm{Re}\{X[k]\} = -\mathrm{Re}\{X[-k]\}$ $\mathrm{Im}\{X[k]\} = \mathrm{Im}\{X[-k]\}$

3.6.2(cont) Simetría – Pares e impares

c) **x(t) valores reales y simetría impar** $\Rightarrow x^*(t) = x(t)\,;\, x(-t) = -x(t)$

$$X^*(j\omega) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt\right]^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t}dt =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} x(-t)e^{-j\omega(-t)}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\tau t}d\tau = X(j\omega)$$

La única manera de que la condición X*(jω)=X(jω) se cumpla es que X(jω) sea real.

d) x(t) valores reales y simetría par $\Rightarrow x^*(t) = x(t)\,;\, x(-t) = x(t)$

$$X^*(j\omega) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt\right]^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t}dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(-t)e^{-j\omega(-t)}dt = -\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\tau t}d\tau = -X(j\omega)$$

Luego para que X*(jω)=-X(jω) necesariamente X(jω) es imaginario puro.

3.6.3 Corrimiento en el tiempo

$$x(t-t_0) \overset{FT}{\leftrightarrow} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

$$x(t-t_0) \overset{FS;\omega_0}{\leftrightarrow} e^{-jk\omega_0 t_0} X[k]$$

$$x[n-n_0] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} e^{-j\Omega n_0} X(e^{j\Omega})$$

$$x[n-n_0] \overset{DTFS;\Omega_0}{\leftrightarrow} e^{-jk\Omega_0 n_0} X[k]$$

3.6.4 Corrimiento en frecuencia

$$e^{j\gamma t} x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(j(\omega-\gamma))$$

$$e^{jk_0\omega_0 t} x(t) \overset{FS;\omega_0}{\leftrightarrow} X[k-k_0]$$

$$e^{j\Gamma n} x[n] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(e^{j(\Omega-\Gamma)})$$

$$e^{jk_0\Omega_0 n} x[n] \overset{DTFS;\Omega_0}{\leftrightarrow} X[k-k_0]$$

3.6.4 Escalamiento : TF

$$x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} X(j\omega) \quad ; \quad z(t) = x(at)$$

$$x(at) = z(t) \quad \overset{FT}{\leftrightarrow} \quad \frac{1}{|a|} X\left(j\frac{\omega}{a} \right) = Z(j\omega)$$

Reproducir a velocidad más alta (a>1), comprimimos señal de tiempo.
En el dominio de la frecuencia se expande, más agudos.

Ejemplo 3.48 Escalamiento a un pulso rectangular

Considere el pulso rectangular definido como : $x(t) = \begin{cases} 1, & -T_0 \le t \le T_0 \\ 0, & |t| > T_0 \end{cases}$
(ver ejemplo 3.25)

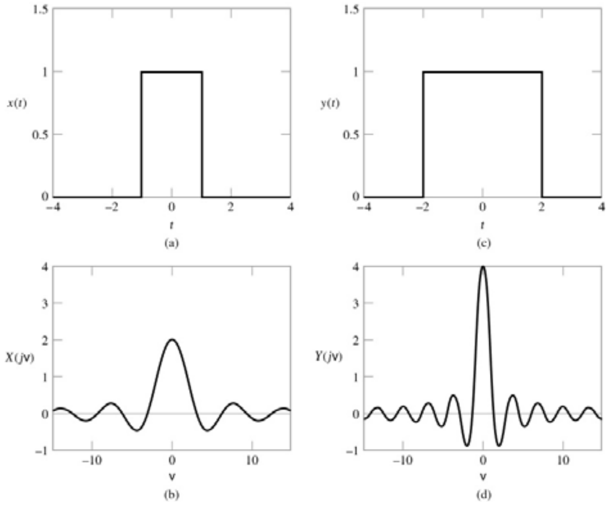
Su tranformada de Fourier es : $X(j\omega) = \frac{2}{\omega} sen(\omega T_0)$

Si T_0=1. Calcular la Transformada de Fourier de y(t)=x(t/2) .

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases} \qquad y(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 2 \\ 0, & |t| > 2 \end{cases}$$

$$Y(j\omega) = \frac{1}{\left|\frac{1}{2}\right|} X\left(j\frac{\omega}{\frac{1}{2}} \right) = 2X(j2\omega) = 2\frac{2}{2\omega} sen(2\omega) = \frac{2}{\omega} sen(2\omega)$$

Figure 3.71 (p. 301)
Application of the FT scaling property in Example 3.48. (a) Original time signal. (b) Original FT. (c) Scaled time signal $y(t) = x(t/2)$. (d) Scaled FT $Y(j\omega) = 2X(j2\omega)$.



3.6.4 Escalamiento : FS

si x(t) tiene periodo fundamental T (ω_0),
z(t) tiene periodo fundamental T/a ($a\omega_0$)

$$x(t) \overset{FS;\omega_0}{\leftrightarrow} X[k]$$

$$x(at) = z(t) \overset{FS;a\omega_0}{\leftrightarrow} Z[k] = X[k]$$

La operación de escalamiento cambia simplemente el espaciamiento armónico de (ω_0) a (a ω_0)

3.6.4 Escalamiento : DTFT , DTFS

$z[n] = x[pn], \forall p \in Z \quad ; \quad |p| > 1 \Rightarrow$ **perdida de información**

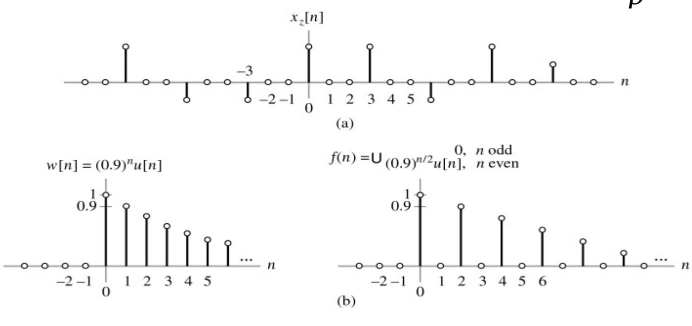
$x_z[n] = 0, \; a \; menos \; que \; \frac{n}{p} \in Z$

$$x_z(pn) \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X_z(e^{j\Omega/p})$$

$$x_z(pn) \overset{DTFS;\, p\Omega_0}{\leftrightarrow} pX_z[k]$$

Problema 3.80

Dada la señal de la figura : $x_z[n] = 0, \; a \; menos \; que \; \frac{n}{p} \in Z \quad ; p = 3$



a) Demostrar que la DTFT de z[n]=x_z[pn] es : $Z[e^{j\Omega}] = X_z[e^{j\Omega/p}]$
b) De la DTFT de w[n] y prop. escalamiento, calcule la DTFT de f[n]
c) Si x_z[n] es periódica (N), z[n]=x_z[pn] es periódica (N/p) demostrar :

$$Z[k] = pX_z[k]$$

Problema 3.80 (cont.)

a) $$X_z[e^{j\Omega/p}] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_z[n]e^{-j\frac{\Omega}{p}n} \overset{n=pr}{=} \overbrace{\sum_{r=-\infty}^{\infty} x_z[pr]e^{-j\Omega r}}^{\textbf{suma r impar}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_z[pn]e^{-j\Omega n} = Z[e^{j\Omega}]$$

b) $$w[n] = (0.9)^n u[n] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} W(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1-0.9e^{-j\Omega}}$$

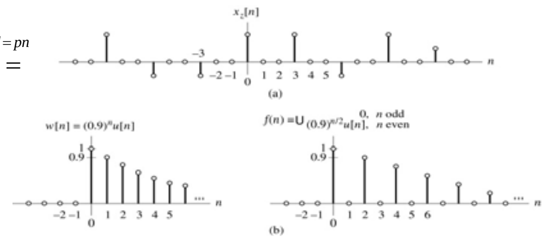
$$f[n] = \begin{cases} w[n/2], & n \ par \\ 0 & , n \ impar \end{cases} \quad \overset{DTFT}{\leftrightarrow} F(e^{j2\Omega}) = \frac{1}{1-0.9e^{-j2\Omega}}$$

c) $$Z[k] = \frac{1}{N/p}\sum_{n=0}^{\frac{N}{p}-1} z[n]e^{-jkn\Omega_0'} \quad ; \quad \Omega_0' = \frac{2\pi}{N/p} = p\Omega_0$$

$$Z[k] = p\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{\frac{N}{p}-1} x_z[pn]e^{-jknp\Omega_0} \overset{l=pn}{=}$$

$$= p\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_z[l]e^{-jkl\Omega_0}$$

$$Z[k] = pX_z[k]$$



Tiempo	Periódica (t,n)	No periódica (t,n)	
Continua (t)	**Serie de Fourier** $$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]e^{jk\omega_0 t}$$ $$X[k] = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$ x(t) periodo T $\Rightarrow \omega_0 = 2\pi/T$	**Tranformada de Fourier** $$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$ $$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$	**No periódica (k,ω)**
Discreta [n]	**Serie Fourier Tiempo Discr.** $$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} X[k]e^{jk\Omega_0 n}$$ $$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\Omega_0 n}$$ x[n] y X[k] periodo N $\Rightarrow \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$	**Tranf. Fourier Tiempo Discr.** $$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega$$ $$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$ $X(e^{j\Omega})$ tiene periodo 2π	**Periódica (k,Ω)**
	Discreta (k)	**Continua (ω,Ω)**	**Frecuencia**

3.6.5 Diferenciación e integración, sumatoria y diferencia

Diferenciación en el tiempo

FT: $x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$; $\frac{d}{dt}x(t)=j\omega\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=j\omega\,X(j\omega)$

No periódica : $\frac{d}{dt}x(t)\overset{FT}{\leftrightarrow}j\omega\,X(j\omega)$

La diferenciación destruye cualquier componente ***dc*** de x(t): $j0\;X(j0)=0$

FS: $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X[k]e^{jk\omega_0 t}$; $\frac{d}{dt}x(t)=jk\omega_0\sum_{k=-\infty}^{\infty}X[k]e^{jk\omega_0 t}=jk\omega_0 X[k]$

Periódica : $\frac{d}{dt}x(t)\overset{FS;\omega_0}{\leftrightarrow}jk\omega_0\;X[k]$

El valor promedio de la señal diferenciada sea cero : $j0\;\omega_0 X(0)=0$

3.6.5 Diferenciación e integración, sumatoria y diferencia (cont.1)

Diferenciación en frecuencia

FT: $X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$; $\frac{d}{d\omega}X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(-jt\,x(t)\right)e^{-j\omega t}dt$

No periódica : $-jt\,x(t)\overset{FT}{\leftrightarrow}\frac{d}{d\omega}X(j\omega)$

La diferenciación no se aplica a cantidades de valor discreto: FS, DTFS

DTFT: $X\left(e^{j\Omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\Omega n}$ $\frac{d}{d\Omega}X\left(e^{j\Omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(-jn\,x[n]\right)e^{-j\Omega n}$

No periódica : $-jn\,x[n]\overset{DTFT}{\leftrightarrow}\frac{d}{d\Omega}X(e^{j\Omega})$

3.6.5 Diferenciación e integración, sumatoria y diferencia (cont.2)

$$x(t)=\frac{d}{dt}y(t)\leftrightarrow x[n]=y[n]-y[n-1]$$

Sumatorio y diferencia

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\leftrightarrow y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$$

$$x[n]\overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(e^{j\Omega})=\left(1-e^{-j\Omega}\right)Y(e^{j\Omega})$$

$$y[n]\overset{DTFT}{\leftrightarrow} Y(e^{j\Omega})=\frac{X(e^{j\Omega})}{1-e^{-j\Omega}}+\pi X(e^{j0})\delta(\Omega),\quad -\pi<\Omega<\pi$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]=y[n]\overset{DTFT}{\leftrightarrow}\frac{X(e^{j\Omega})}{1-e^{-j\Omega}}+\pi X(e^{j0})\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-k2\pi)$$

Integración

$$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\overset{FT}{\leftrightarrow}\frac{1}{j\omega}X(j\omega)+\pi X(j0)\delta(\omega)$$

3.6.5 Diferenciación e integración, sumatoria y diferencia (resumen)

$$\frac{d}{dt}x(t)\overset{FT}{\leftrightarrow} j\omega\, X(j\omega)$$

$$\frac{d}{dt}x(t)\overset{FS;\omega_0}{\leftrightarrow} jk\omega_0\; X[k]$$

$$-jt\,x(t)\overset{FT}{\leftrightarrow}\frac{d}{d\omega}X(j\omega)$$

$$-jn\,x[n]\overset{DTFT}{\leftrightarrow}\frac{d}{d\Omega}X(e^{j\Omega})$$

$$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\overset{FT}{\leftrightarrow}\frac{1}{j\omega}X(j\omega)+\pi X(j0)\delta(\omega)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\overset{DTFT}{\leftrightarrow}\frac{X(e^{j\Omega})}{1-e^{-j\Omega}}+\pi X(e^{j0})\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-k2\pi)$$

3.6.6 Convolución y modulación

Convolución de señales no periódicas

$$y(t)=h(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau \quad ; \quad x(t-\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega(t-\tau)}d\omega$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}e^{-j\omega\tau}d\omega d\tau=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right]X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[H(j\omega)X(j\omega)\right]e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}Y(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$y(t)=h(t)*x(t)\overset{FT}{\leftrightarrow}Y(j\omega)=H(j\omega)X(j\omega)$$

$$\begin{array}{l} x[n]\overset{DTFT}{\leftrightarrow}X(e^{j\Omega}) \\ h[n]\overset{DTFT}{\leftrightarrow}H(e^{j\Omega}) \end{array} \Rightarrow \quad y[n]=x[n]*h[n]\overset{DTFT}{\leftrightarrow}Y(e^{j\Omega})=X(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega})$$

3.6.6 Convolución y modulación (cont. 1)

Modulación , señales no periódicas

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\upsilon)e^{j\upsilon t}d\upsilon$$

$$z(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}Z(j\eta)e^{j\eta t}d\eta$$

$$y(t)=x(t)z(t)\xleftrightarrow{FT}Y(j\omega)=\frac{1}{2\pi}X(j\omega)*Z(j\omega)$$

$$\begin{array}{l} x[n]\overset{DTFT}{\leftrightarrow}X(e^{j\Omega}) \\ z[n]\overset{DTFT}{\leftrightarrow}Z(e^{j\Omega}) \end{array} \Rightarrow \quad y[n]=x[n]z[n]\xleftrightarrow{DTFT}Y(e^{j\Omega})=\frac{1}{2\pi}X(e^{j\Omega})\otimes Z(e^{j\Omega})$$

$$\textit{convolución periódica } (2\pi)\Rightarrow \quad X(e^{j\Omega})\otimes Z(e^{j\Omega})=\int_{\langle 2\pi\rangle}X(e^{j\theta})Z(e^{j(\Omega-\theta)})d\theta$$

3.6.6 Convolución y modulación (cont. 2)

Convolución , señales periódicas

$$y(t) = x(t) \otimes z(t) = \int_{\langle T \rangle} x(\tau) z(t-\tau) d\tau$$

$$y(t) = x(t) \otimes z(t) \xleftrightarrow{FS;2\pi/T} Y[k] = T\ X[k]\,Z[k]$$

$$y[n] = x[n] \otimes z[n] = \sum_{K=\langle N \rangle} x[k] z[n-k]$$

$$y[n] = x[n] \otimes z[n] \xleftrightarrow{DTFS;2\pi/N} Y[k] = N\ X[k]\,Z[k]$$

Modulación , señales periódicas

$$y(t) = x(t) z(t) \xleftrightarrow{FS;2\pi/T} Y[k] = X[k] * Z[k]$$

$$X[k] * Z[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X[m] Z[k-m]$$

$$y[n] = x[n] z[n] \xleftrightarrow{DTFS;2\pi/N} Y(k) = X(k) \otimes Z(k)$$

$$X(k) \otimes Z(k) = \sum_{m=\langle N \rangle} X[m] Z[k-m]$$

3.6.6 Convolución y modulación (resumen)

Convolución	***Modulación***
$h(t) * x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} H(j\omega) X(j\omega)$	$x(t) z(t) \xleftrightarrow{FT} \dfrac{1}{2\pi} X(j\omega) * Z(j\omega)$
$x(t) \otimes z(t) \xleftrightarrow{FS;\omega} T\ X[k]\,Z[k]$	$x(t) z(t) \xleftrightarrow{FS;\omega_0} X[k] * Z[k]$
$x[n] * h[n] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(e^{j\Omega}) H(e^{j\Omega})$	$x[n] z[n] \xleftrightarrow{DTFT} \dfrac{1}{2\pi} X(e^{j\Omega}) \otimes Z(e^{j\Omega})$
$x[n] \otimes z[n] \xleftrightarrow{DTFS;\Omega_0} N\ X[k]\,Z[k]$	$x[n] z[n] \xleftrightarrow{DTFS;\Omega_0} X(k) \otimes Z(k)$

3.6.7 Filtrado.

Modulación en el dominio de la frecuencia

Filtros : pasa baja, pasa alta, pasa banda y atenua banda

$$y(t) = h(t) * x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{H(j\omega)} Y(j\omega) = H^{inv}(j\omega)\, Y(j\omega)$$

$$20\log\left|H(j\omega)\right|\ dB$$

Espectro de energía : $\left|Y(j\omega)\right|^2 = \left|H(j\omega)\right|^2 \left|X(j\omega)\right|^2$

$$\left|Y(j\omega_c)\right|^2 = \frac{1}{2}\left|H(j\omega_c)\right|^2 \left|X(j\omega_c)\right|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}} H(j\omega_c)\right|^2 \left|X(j\omega_c)\right|^2$$

$$20\log\left|\frac{1}{\sqrt{2}} H(j\omega)\right|\ dB = 20\log\frac{1}{\sqrt{2}}\, dB + 20\log\left|H(j\omega)\right|\ dB = -3dB + 20\log\left|H(j\omega)\right|\ dB$$

$$x[n] * h[n] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega})$$

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{H(e^{j\Omega})} Y(e^{j\Omega}) = H^{inv}(e^{j\Omega})\, Y(e^{j\Omega})$$

$$20\log\left|H(e^{j\Omega})\right|\ dB$$

Figure 3.53 (p. 263)
Frequency response of ideal continuous- (left panel) and discrete-time (right panel) filters.
(a) Low-pass characteristic.
(b) High-pass characteristic.
(c) Band-pass characteristic.

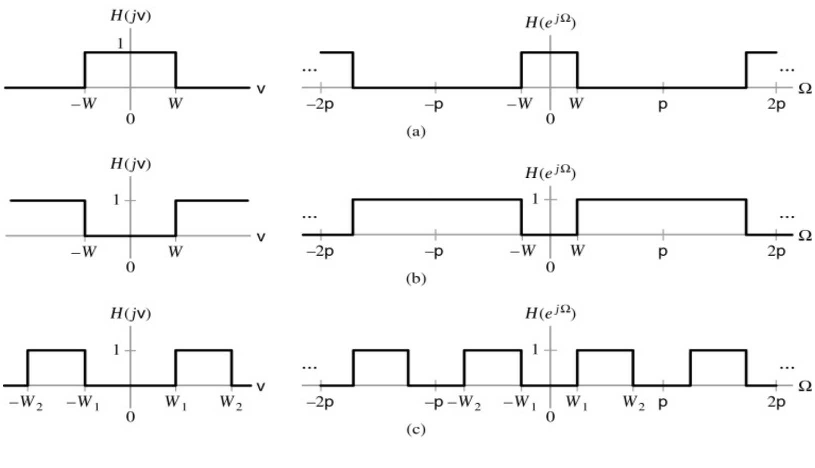
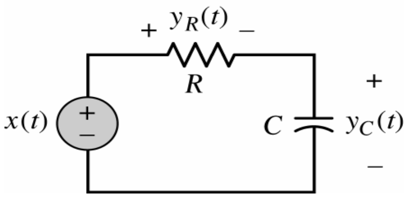


Figure 3.54 (p. 264)
RC circuit with input $x(t)$ and outputs $y_{c(t)}$ and $y_R(t)$.

$$h_c(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$
$$y_R(t) = x(t) - y_C(t)$$
$$h_R(t) = \delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$



Dibujar la respuesta en frecuencia de ambos sistemas

$$H_C(j\omega) = \frac{1}{j\omega RC + 1} \quad ; \quad H_R(j\omega) = \frac{j\omega RC}{j\omega RC + 1}$$

Figure 3.55a&c (p. 265)
<u>RC circuit magnitude responses as a function of normalized frequency ωRC.</u>
(a) Frequency response of the system corresponding to $y_C(t)$, linear scale.
b) Frequency response of the system corresponding to $y_R(t)$, linear scale.
c) Frequency response of the system corresponding to $y_C(t)$, dB scale.
(d) Frequency response of the system corresponding to $y_R(t)$, dB scale, shown on the range from 0 dB to –25 dB.

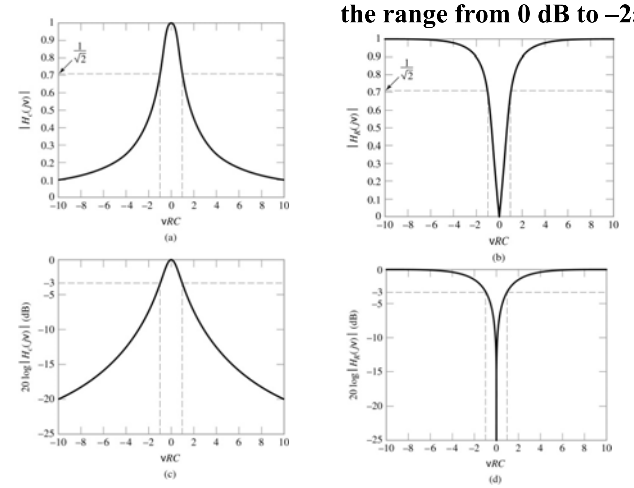
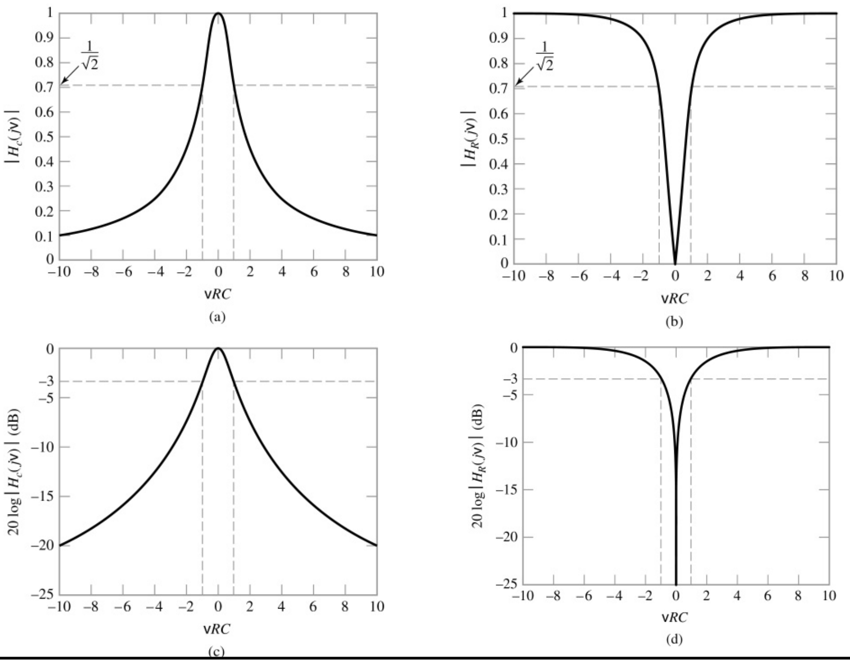


Figure 3.55b&d (p. 265)



3.6.8 Relación de Parseval

La energía o potencia se conserva en le representación de Fourier

Energía de una señal no periódica x(t) :

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad ; \quad |x(t)|^2 = x(t)x^*(t) \quad ;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \quad : \textit{Teorema de energía de Rayleigh}$$

normalizado por 2π

$|H(j\omega)|^2 \Rightarrow$ *espectro de energía de la señal*

Energía : señales no periódicas en el dominio del tiempo

Potencia : señales periódicas en el dominio del tiempo (sobre un periodo normalizado)

3.6.8 Relación de Parseval (cont.)

FT $$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

FS $$\frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X[k]|^2$$

DTFT $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} |X(e^{j\Omega})|^2 d\Omega$$

DTFS $$\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} |X[k]|^2$$

Tiempo	Periódica (t,n)	No periódica (t,n)	
Continua (t)	**Serie de Fourier** $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\omega_0 t}$ $X[k] = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$ x(t) periodo T $\Rightarrow \omega_0 = 2\pi/T$	**Tranformada de Fourier** $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$ $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$	**No periódica (k,ω)**
Discreta [n]	**Serie Fourier Tiempo Discr.** $x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} X[k] e^{jk\Omega_0 n}$ $X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$ x[n] y X[k] periodo N $\Rightarrow \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$	**Tranf. Fourier Tiempo Discr.** $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega$ $X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$ $X(e^{j\Omega})$ tiene periodo 2π	**Periódica (k,Ω)**
	Discreta (k)	**Continua (ω,Ω)**	**Frecu-encia**

3.6.9 Dualidad

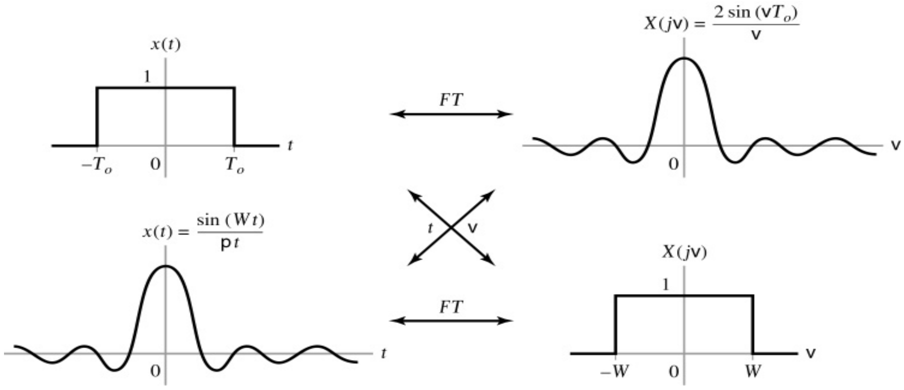
<u>Dualidad de FT</u>

$$\delta(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} 1 \quad ; \quad -\infty < \omega < \infty$$

$$1 \overset{FT}{\leftrightarrow} 2\pi\delta(\omega)$$

Figure 3.73 (p. 307)

Duality of rectangular pulses and sinc functions.



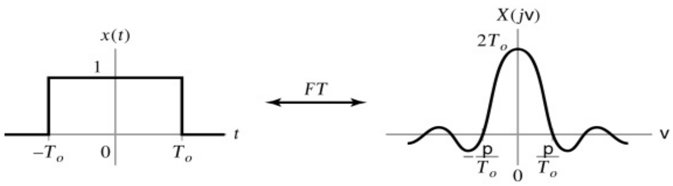
3.6.9 Dualidad (resumen)

FT $f(t) \xleftrightarrow{FT} F(j\omega) \qquad F(jt) \xleftrightarrow{FT} 2\pi f(-\omega)$

DTFS $x[n] \xleftrightarrow{DTFS;2\pi/N} X[k] \qquad X[n] \xleftrightarrow{DTFS;2\pi/N} \frac{1}{N} x[-k]$

DTFT y FS $x[n] \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\Omega}) \qquad X(e^{j\Omega}) \xleftrightarrow{FS;1} x[-k]$

3.6.10 Producto tiempo-ancho de banda



Ancho de banda :¿contenido de frecuencia significativa de la señal? "frecuencia a la cual el espectro de magnitud es $1/\sqrt{2}$ veces su valor de pico". Si x(t) está centrada en el origen y es paso bajas :
Duración de una señal = T_d Ancho de banda = B_w

$$T_d = \left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |x(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt} \right|^{1/2} \qquad B_w = \left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |X(j\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega} \right|^{1/2} \qquad T_d B_w \geq \frac{1}{2}$$

principio de incertidumbre

Problema 3.48

Calcule los coeficientes del DTFS de la señal :

$N = 17,\, \Omega_o = \frac{2\pi}{17}$

$$\begin{aligned} x[n] &= \cos(\frac{6\pi}{17}n + \frac{\pi}{3}) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{j(\frac{6\pi}{17}n+\frac{\pi}{3})} + e^{-j(\frac{6\pi}{17}n+\frac{\pi}{3})}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{\pi}{3}}e^{j(3)\frac{2\pi}{17}n} + e^{-j\frac{\pi}{3}}e^{j(-3)\frac{2\pi}{17}n}\right) \end{aligned}$$

Por inspección

$$X[k] = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}} & k = 3 \\ \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}} & k = -3 \\ 0 & \text{otherwise on } k = \{-8, -7, ..., 8\} \end{cases}$$

Problema 3.49

Dado los coeficientes del desarrollo DTFS, generar la señal

$N = 21,\, \Omega_o = \frac{2\pi}{21}$

$$\begin{aligned} X[k] &= \cos(\frac{8\pi}{21}k) \\ &= \frac{1}{2}[e^{-j(-4)\frac{2\pi}{21}k} + \frac{1}{2}e^{-j(4)\frac{2\pi}{21}k}] \end{aligned}$$

Por inspección

$$x[n] = \begin{cases} \frac{21}{2} & n = \pm 4 \\ 0 & \text{otherwise on } n \in \{-10, -9, ..., 10\} \end{cases}$$

Problema 3.50

Calcule los coeficientes del FS de la señal :

(a) $T_1 = \frac{2}{3},\ T_2 = \frac{1}{2},\ T = lcm(T_1, T_2) = 2,\ \omega_o = \pi$
lcm is the least common multiple.

$$\begin{aligned} x(t) &= \sin(3\pi t) + \cos(4\pi t) \\ &= \frac{1}{2j}e^{j(3)\pi t} - \frac{1}{2j}e^{j(-3)\pi t} + \frac{1}{2}e^{j(4)\pi t} + \frac{1}{2}e^{j(-4)\pi t} \end{aligned}$$

Por inspección

$$X[k] = \begin{cases} \frac{1}{2} & k = \pm 4 \\ \frac{1}{2j} & k = 3 \\ \frac{-1}{2j} & k = -3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Problema 3.51

Dado los coeficientes del desarrollo FS, generar la señal

$$X[k] = j\delta[k-1] - j\delta[k+1] + \delta[k-3] + \delta[k+3], \quad \omega_o = 2\pi$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} X[k]e^{j2\pi kt} \\ &= je^{j(1)2\pi t} - je^{j(-1)2\pi t} + e^{j(3)2\pi t} + e^{j(-3)\pi t} \\ &= -2\sin(2\pi t) + 2\cos(6\pi t) \end{aligned}$$

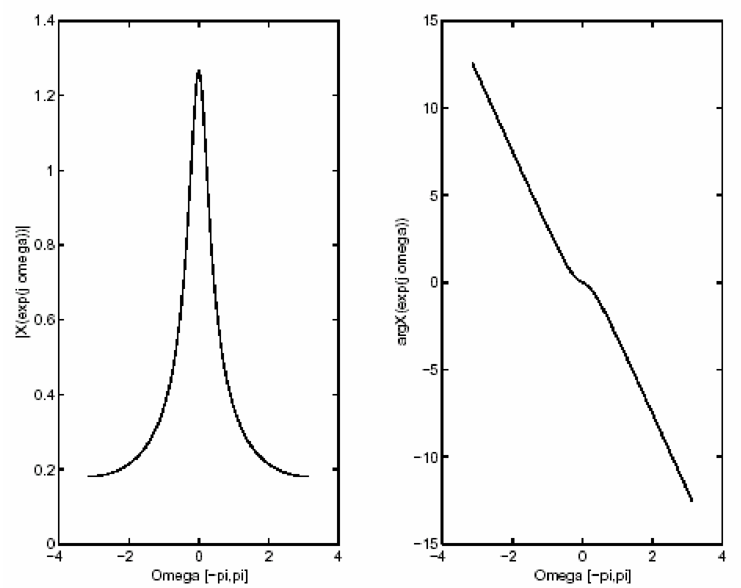
Problema 3.52

Calcular la DTFT de la señal : $x[n] = (\frac{3}{4})^n u[n-4]$

$$\begin{aligned} X(e^{j\Omega}) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{m=4}^{\infty} (\frac{3}{4})^n e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{m=4}^{\infty} (\frac{3}{4} e^{-j\Omega})^n \\ &= \frac{(\frac{3}{4} e^{-j\Omega})^4}{1 - \frac{3}{4} e^{-j\Omega}} \end{aligned}$$

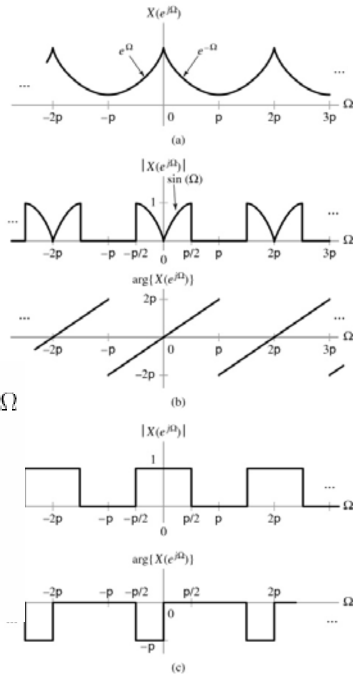
$$\begin{aligned} |X(e^{j\Omega})| &= \frac{(\frac{3}{4})^4}{(\frac{25}{16} - \frac{3}{2}\cos(\Omega))^{0.5}} \\ \angle X(e^{j\Omega}) &= -4\Omega + \arctan\left(\frac{3\sin(\Omega)}{4 - 3\cos(\Omega)}\right) \end{aligned}$$

Problema 3.52 (cont.)



Problema 3.53

Calcular la la inversa de $X\,(e^{\Omega})$



a)

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{\Omega(jn+1)}\,d\Omega + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{\Omega(jn-1)}\,d\Omega$$
$$= \frac{1+e^{-\pi}(-1)^n}{\pi(n^2+1)}$$

c)

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} e^{-j\pi}e^{j\Omega n}\,d\Omega + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{j\Omega n}\,d\Omega$$
$$= \frac{\cos(\frac{\pi}{2}n)-1}{j\pi n}$$

$$x[n] = \begin{cases} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}n)-1}{j\pi n} & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

Problema 3.54

Calcular la TF de la señal :

$$x(t) = e^{-2t}u(t-3)$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt$$
$$= \int_{3}^{\infty} e^{-2t}e^{-j\omega t}\,dt$$
$$= \frac{e^{-3(2+j\omega)}}{2+j\omega}$$

Problema 3.55

Calcular la inversa FT de X(jω)

a)

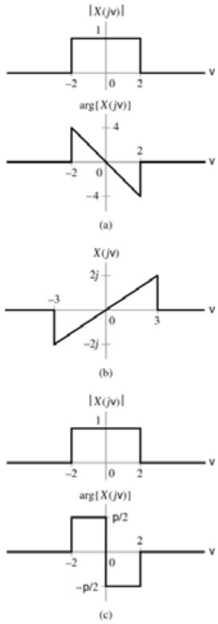
$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} e^{-j2\omega} e^{-j\omega t}\, d\omega = \frac{\sin(2(t-2))}{\pi(t-2)}$$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{\sin(2(t-2))}{\pi(t-2)} & t \neq 2 \\ \frac{2}{\pi} & t = 2 \end{cases}$$

b)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-3}^{3} \frac{2}{3} j\omega e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{2\cos(3t)}{2\pi t} - \frac{2\sin(3t)}{3\pi t^2}$$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{2\cos(3t)}{\pi t} - \frac{2\sin(3t)}{3\pi t^2} & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$



Tiempo	Periódica (t,n)	No periódica (t,n)	
Continua (t)	**Serie de Fourier** $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\omega_0 t}$ $X[k] = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$ x(t) periodo T $\Rightarrow \omega_0 = 2\pi/T$	**Tranformada de Fourier** $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$ $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$	No periódica (k,ω)
Discreta [n]	**Serie Fourier Tiempo Discr.** $x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} X[k] e^{jk\Omega_0 n}$ $X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$ x[n] y X[k] periodo N $\Rightarrow \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$	**Tranf. Fourier Tiempo Discr.** $x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega$ $X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$ $X(e^{j\Omega})$ tiene periodo 2π	Periódica (k,Ω)
	Discreta (k)	**Continua (ω,Ω)**	Frecu-encia

Problema 3.57a) Calcular la señal en el dominio del tiempo a partir de su representación en el dominio de la frecuencia.

$$(a)\ X[k] = \begin{cases} e^{-jk\pi/2}, & |k| < 10 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Periodo fundamental en el dominio del tiempo T=1

discreto y no periódico $\xleftrightarrow{FS;2\pi}$ periódico y continuo

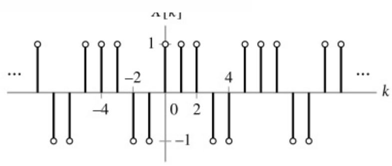
$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-9}^{9} e^{-j\frac{\pi}{2}k} e^{-j2\pi k} \\ &= \sum_{k=-9}^{9} (e^{-j\pi(2t-0.5)})^k \\ &= \frac{\sin(\frac{19}{2}\pi(2t-0.5))}{\sin(\frac{1}{2}\pi(2t-0.5))} \end{aligned}$$

Problema 3.58b) Calcular la señal en el dominio del tiempo a partir de su representación en el dominio de la frecuencia.

discreto y periódico $\xleftrightarrow{DTFS;2\pi/5}$ discreto y periódico

$N = 5,\ \Omega_o = \frac{2\pi}{5}$ Choose $n, k \in \{-2, -1, ...2\}$

$$\begin{aligned} x[n] &= \sum_{k=-2}^{2} X[k] e^{-j\frac{2\pi}{5}kn} \\ &= -e^{j\frac{4\pi}{5}n} + e^{-j\frac{4\pi}{5}n} + 1 - e^{j\frac{2\pi}{5}n} + e^{-j\frac{2\pi}{5}n} \\ &= 1 - 2j\sin(\frac{2\pi}{5}n) - 2j\sin(\frac{4\pi}{5}n) \end{aligned}$$



(a)

Problema 3.58c) Calcular la señal en el dominio del tiempo a partir de su representación en el dominio de la frecuencia.

$$\text{(c) } X(j\omega) = \begin{cases} \cos(\frac{\omega}{4}) + j\sin(\frac{\omega}{4}), & |\omega| < \pi \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

continuo y no periódico $\xleftrightarrow{DT}$ continuo y no periódico

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\frac{\omega}{4}} e^{j\omega t}\, d\omega \\ &= \frac{\sin(\pi(t+0.25))}{\pi(t+0.25)} \end{aligned}$$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi(t+0.25))}{\pi(t+0.25)} & k \neq -\frac{1}{4} \\ 1 & k = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Problema 3.58

Utilice la tabla de transformadas y las propiedades para calcular la FT

$$\text{(a) } x(t) = \sin(2\pi t)e^{-t}u(t)$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \sin(2\pi t)e^{-t}u(t) \\ &= \frac{1}{2j}e^{j2\pi t}e^{-t}u(t) - \frac{1}{2j}e^{-j2\pi t}e^{-t}u(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{-t}u(t) &\xleftrightarrow{FT} \frac{1}{1+j\omega} \\ e^{j2\pi t}s(t) &\xleftrightarrow{FT} S(j(\omega-2\pi)) \\ X(j\omega) &= \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{1+j(\omega-2\pi)} - \frac{1}{1+j(\omega+2\pi)}\right] \end{aligned}$$

Problema 3.60

Utilice la tabla de transformadas y las propiedades para calcular la DTFT

(a) $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n+2]$

$$
\begin{aligned}
x[n] &= (\frac{1}{3})^n u[n+2] \\
&= (\frac{1}{3})^{-2}(\frac{1}{3})^{n+2} u[n+2] \\
(\frac{1}{3})^n u[n] &\xleftrightarrow{DTFT} \frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega}} \\
s[n+2] &\xleftrightarrow{DTFT} e^{j2\Omega} S(e^{j\Omega}) \\
X(e^{j\Omega}) &= \frac{9e^{j2\Omega}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega}}
\end{aligned}
$$

Problema 3.68b

Determine la respuesta en frecuencia y la respuesta al impulso para el sistema definido por la siguiente ecuación diferencial :

(b) $\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 5\frac{d}{dt}y(t) + 6y(t) = -\frac{d}{dt}x(t)$

$$
\begin{aligned}
(j\omega)^2 Y(j\omega) + 5j\omega Y(j\omega) + 6Y(j\omega) &= -j\omega X(j\omega) \\
H(j\omega) &= \frac{-j\omega}{(j\omega)^2 + 5j\omega + 6} \\
&= -\frac{3}{3+j\omega} + \frac{2}{2+j\omega} \\
h(t) &= (-3e^{-3t} + 2e^{-2t})u(t)
\end{aligned}
$$

Problema 3.68c

Determine la respuesta en frecuencia y la respuesta al impulso para el sistema definido por la siguiente ecuación diferencial :

(c) $y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = 3x[n] - \frac{3}{4}x[n-1]$

$$(1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega} - \frac{1}{8}e^{-j2\Omega})Y(e^{j\Omega}) = (3 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega})X(e^{j\Omega})$$

$$\begin{aligned} H(e^{j\Omega}) &= \frac{3 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega} - \frac{1}{8}e^{-j2\Omega}} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} + \frac{2}{1 + \frac{1}{4}e^{-j\Omega}} \\ h[n] &= \left[(\frac{1}{2})^n + 2(-\frac{1}{4})^n\right] u[n] \end{aligned}$$

Problema 3.73

Utilizar la descomposición en fracciones simples para calcular la transformada inversa de Fourier de :

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \frac{6j\omega + 16}{(j\omega)^2 + 5j\omega + 6} \\ &= \frac{A}{3 + j\omega} + \frac{B}{2 + j\omega} \\ 6 &= A + B \\ 16 &= 2A + 3B \\ X(j\omega) &= \frac{2}{3 + j\omega} + \frac{4}{2 + j\omega} \\ x(t) &= (2e^{-3t} + 4e^{-2t})u(t) \end{aligned}$$

Problema 3.74

Utilizar la descomposición en fracciones simples para calcular la transformada inversa de Fourier en tiempo discreto de :

$$
\begin{aligned}
X(e^{j\Omega}) &= \frac{2}{-e^{-j2\Omega}+e^{-j\Omega}+6} \\
&= \frac{A}{1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}} + \frac{B}{1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega}} \\
0 &= -\frac{1}{3}A + \frac{1}{2}B \\
\frac{1}{3} &= A + B \\
X(e^{j\Omega}) &= \frac{\frac{1}{5}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}} + \frac{\frac{2}{15}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega}} \\
x[n] &= \left(\frac{1}{5}(-\frac{1}{2})^n + \frac{2}{15}(\frac{1}{3})^n\right) u[n]
\end{aligned}
$$