Transformaciones Geométricas Afines

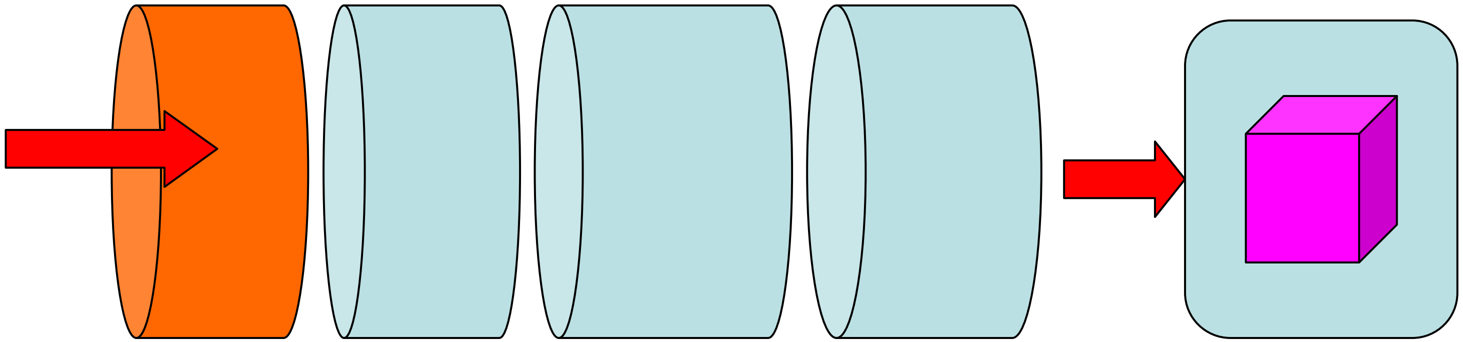
(X1,Y1, Z1)

(X2, Y2, Z2)

(X3,Y3, Z3)…

geometría

Coordenadas del objeto (en punto flotante)



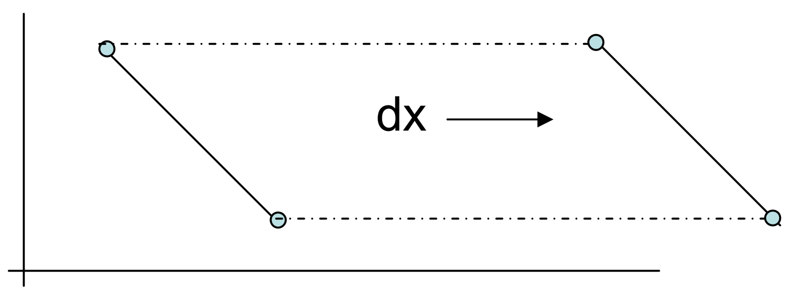
T. Afines **T. Vista** **Recorte y T. Proyección** **Dibujado de primitivas (Rasterización)**

Coordenadas del MUNDO

(en punto flotante)

Transformaciones Geométricas Afines

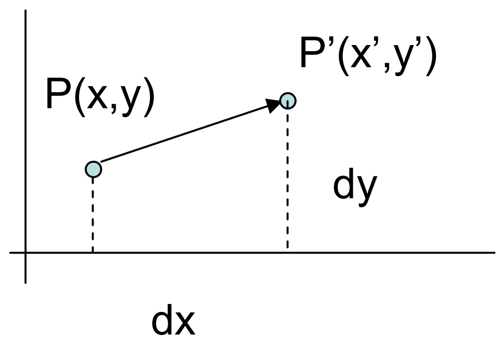
- Llamamos transformaciones geométricas afines a las operaciones sobre la geometría de un objeto 2D o 3D, que producen una modificación de la misma (producen un cambio de los valores de los puntos que definen el objeto) MANTENIENDO LAS PROPORCIONES DEL OBJETO (colinearidad y razones de distancias).
- Las transfomaciones no se aplican sobre los puntos que se obtienen de los algoritmos de trazado de primitivas ya que sería un gasto absurdo de cómputo. Se aplican sobre los elementos geométricos que definen a las mismas . (puntos de inicio y final para rectas, centro y radio para circunferencias, semiejes para elipses,…)



- Estudiaremos primeramente estas transformaciones geométricas en 2D.

Traslaciones

- **Traslación**
- Se consigue un cambio de posición del punto en una determinada dirección
- P(x,y) P'(x',y') donde $\begin{cases} x' = x + dx \\ y' = y + dy \end{cases}$



- En notación matricial

- $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ $T = \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$

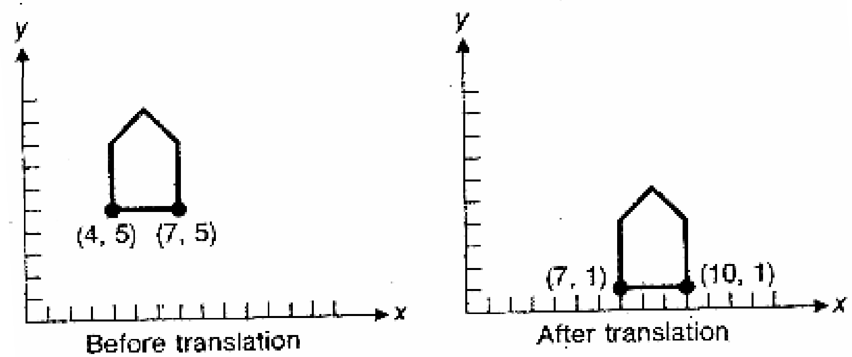
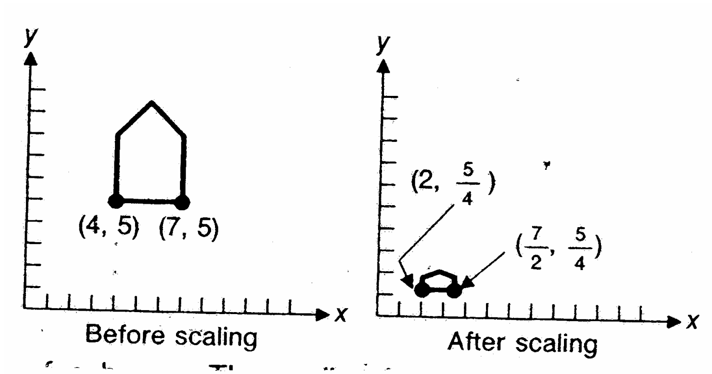


Fig. 5.1 Translation of a house.

- **P' = P + T**

Escalado

- Escalado
- Definimos el escalado sobre los dos ejes de coordenadas del mundo
- $P(x,y) = (x,y)$ $\quad\quad P'(x',y') = \begin{cases} x' = S_x\, x \\ y' = S_y\, y \end{cases}$



- Forma Matricial
- $$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
- **P' = S P**

Escalado < 1 => El objeto se hace más pequeño y más cercano en posición

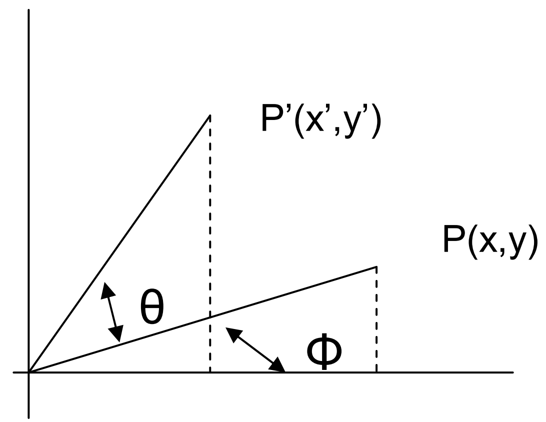
Escalado > 1 => El objeto se hace más grande y más lejano en posición

Si $S_x \neq S_y$ el escalado se denomina NO UNIFORME

Si $S_x = S_y$ el escalado se denomina UNIFORME

Rotación

- La rotación se produce cuando giramos un ángulo θ cada punto RESPECTO AL ORIGEN



- $X = r \cos \Phi$
- $Y = r \sin \Phi$

- $X' = r \cos(\theta + \Phi)$
- $Y' = r \sin(\theta + \Phi)$

- $X' = r \cos(\theta + \Phi) = r \cos \Phi \cos \theta - r \sin \Phi \sin \theta = X \cos \theta - Y \sin \theta$
- $Y' = r \sin(\theta + \Phi) = r \cos \Phi \sin \theta - r \sin \Phi \cos \theta = X \sin \theta + Y \cos \theta$
- En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

es decir **P' = R P**

Rotación (2)

- Esta formulación es para una rotación respecto el origen de coordenadas

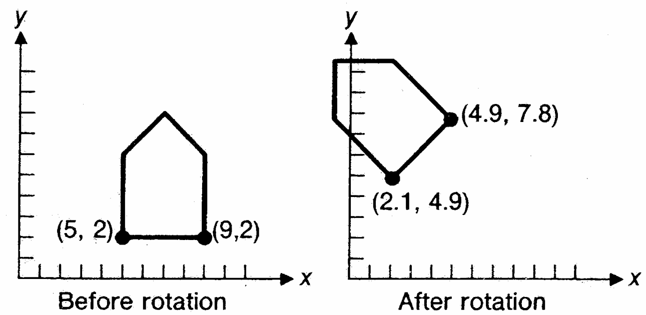
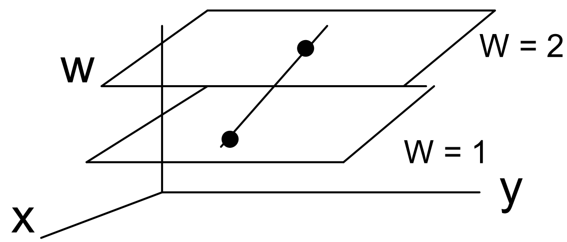


Fig. 5.3 Rotation of a house. The house also changes position.

Los ángulos positivos son en el sentido contrario del movimiento de las agujas del reloj

Coordenadas homogéneas

- Si nos damos cuenta de la formulación matricial de estas tres transformaciones afines, vemos que la traslación difiere en estructura de las otras
- **P' = P + T**
- **P' = S P**
- **P' = R P**



- Para lograr una expresión matricial para estas tres transformaciones, vamos a introducir las coordenadas homogéneas
- Añadimos una coordenada mas w (x,y) → (x', y', w) de tal manera que
- x = x' / w y = y' / w donde **w ≠ 0**
- Las coordenadas (x, y, 1) son conocidas como coordenadas homogéneas cartesianas o canónicas.
- Para un mismo punto hay infinitas coordenadas homogéneas (2, 3, 6) y (4, 6,12) representan el mismo punto.

Coordenadas homogéneas(2)

- Traslación en coord. Homogéneas

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Composición de traslaciones
- $P' = T(dx,dy)\ P$
- $P'' = T(dx', dy')\ P'$
- $P'' = T(dx', dy')\ T(dx,dy)\ P$ Veamos que esto se cumple en notación matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & dx' \\ 0 & 1 & dy' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & dx + dx' \\ 0 & 1 & dy + dy' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Es decir **$P'' = T(dx + dx', dy + dy')\ P$**

Coordenadas homogéneas(3)

- El escalado en coordenadas homogéneas queda

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Y de igual manera que la matriz de traslaciones es aditiva en los desplazamientos, la de escalado es multiplicativa en sus factores de escalado

- $P' = S(S_x, S_y)\ P$
- $P'' = S(S'_x, S'_y)\ P' = S(S'_x, S'_y)\ S(S_x, S_y)\ P$

$$\begin{pmatrix} S'_x & 0 & 0 \\ 0 & S'_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_x S'_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y S'_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Coordenadas homogéneas(4)

- La rotación en coordenadas homogéneas queda:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Igualmente la composición de rotaciones expresa como el producto de dos matrices
- $P' = R(\theta)\ P$
- $P'' = R(\varphi)\ P' = R(\varphi)\ R(\theta)\ P$

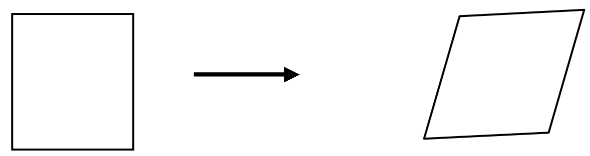
$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta & -\cos\varphi\sin\theta - \sin\varphi\cos\theta & 0 \\ \sin\varphi\cos\theta + \cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\sin\theta + \cos\varphi\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi+\theta & -\sin\varphi+\theta & 0 \\ \sin\varphi+\theta & \cos\varphi+\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

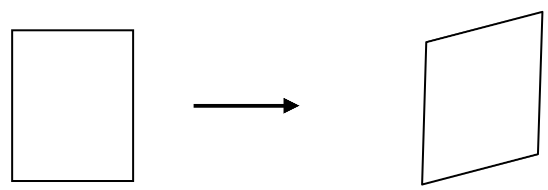
Coordenadas homogéneas(5)

- Otras transformaciones afines son:
- Deslizamientos

$$H_x = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$H_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



- Reflexiones

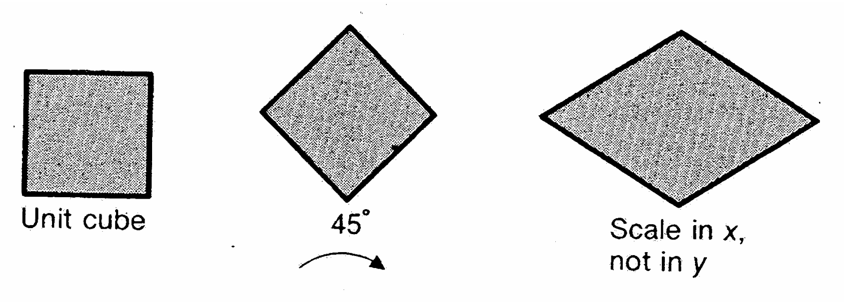
$$R_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tipos de transfomaciones

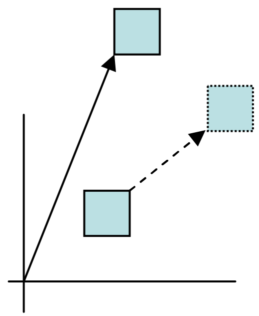
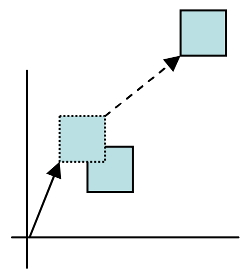
- Las rotaciones, las traslaciones y las reflexiones son transformaciones del sólido rígido.
  - No deforman la figura. Un cuadrado de lado unidad sigue siéndolo tras aplicarle una transformación de este tipo
  - La submatriz (n-1)x(n-1) de estas transformaciones son matrices ortogonales (su determinante es la unidad)

Los escalados y los deslizamientos son transformaciones afines

- Conservan el paralelismo de las líneas pero no su longitud y sus ángulos

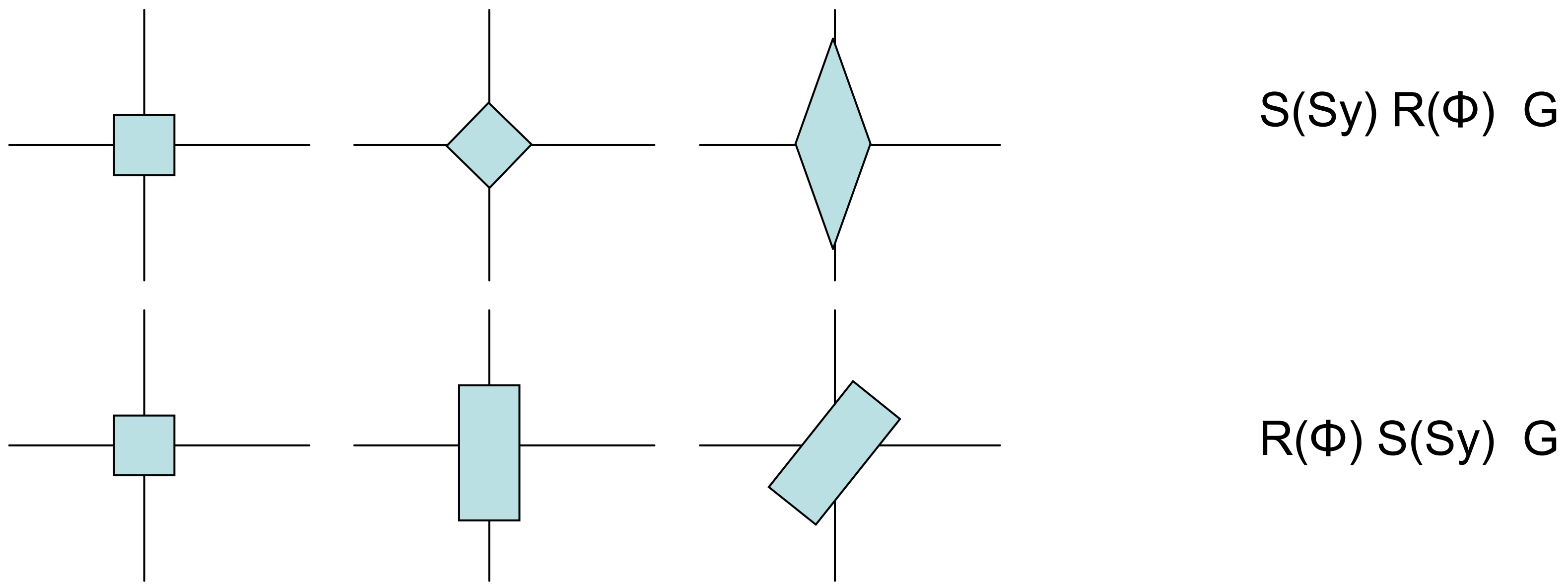


Composición de transformaciones

- Se aplica la composición por razón de eficiencia
- (Aplicar las matrices A y después B sobre 4 puntos implica 8 multiplicaciones de una matriz por un punto. Aplicar la matriz compuesta AB sobre 4 puntos implica una multiplicación de la matriz A por la B y 4 multiplicaciones de una matriz por un punto)
- La composición no es conmutativa $T(d)\, R(\Phi) \neq R(\Phi)\, T(d)$
-  ≠ 
- Casos especiales en que sí lo es
- T con T
- R con R
- S con S
- S uniforme con R

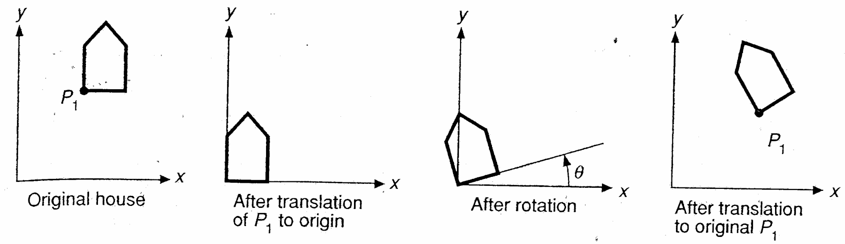
Composición transformaciones

- Una composición especialmente catastrófica es la composición de rotación y escalado
- $R(\Phi)\ S(S_y) \neq S(S_y)\ R(\Phi)$



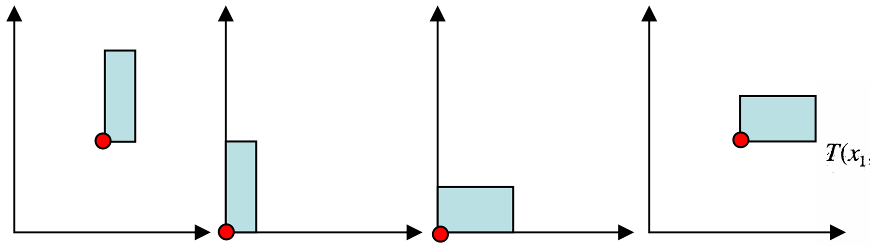
Composición transformaciones(2)

- Uno de los usos más importantes de la composición de matrices es la de poder aplicar transformaciones respecto de cualquier punto del plano.
- ¿cómo conseguirlo?



$$T(x_1, y_1) \cdot R(\theta) \cdot T(-x_1, -y_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

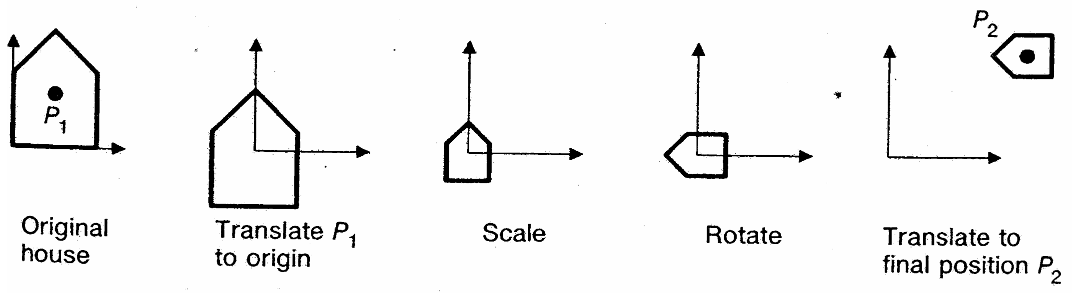
$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x_1(1-\cos\theta) + y_1\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & y_1(1-\cos\theta) - x_1\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.30)$$



$$T(x_1, y_1) \cdot S(s_x, s_y) \cdot T(-x_1, -y_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

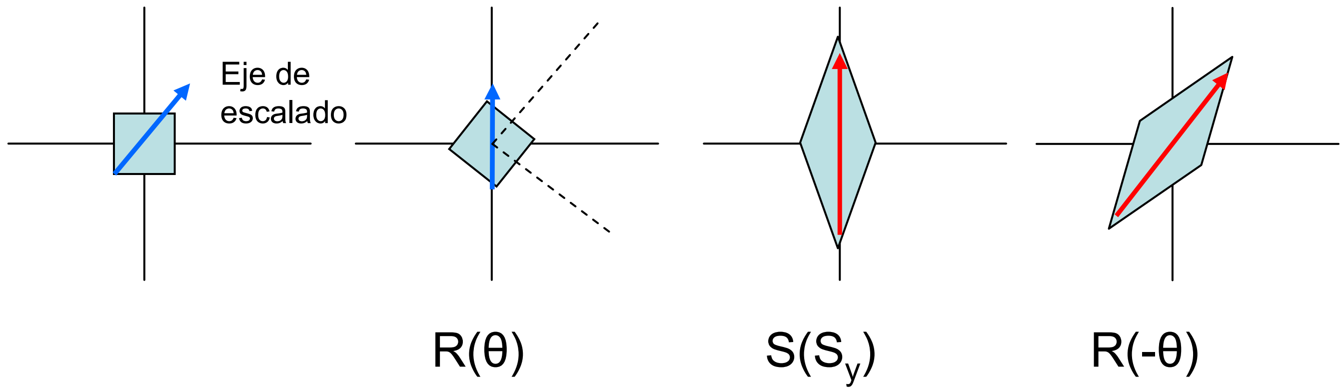
$$= \begin{bmatrix} s_x & 0 & x_1(1-s_x) \\ 0 & s_y & y_1(1-s_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.31)$$

Composición transformaciones(3)



Una composición que combinaría rotación traslación y escalado.

Podemos usar la composición de rotaciones y escalado para poder escalar un objeto respecto de una orientación arbitraria



Y realmente la composición sería $R(-\theta)\ S(Sy)\ R(\theta)\quad G$

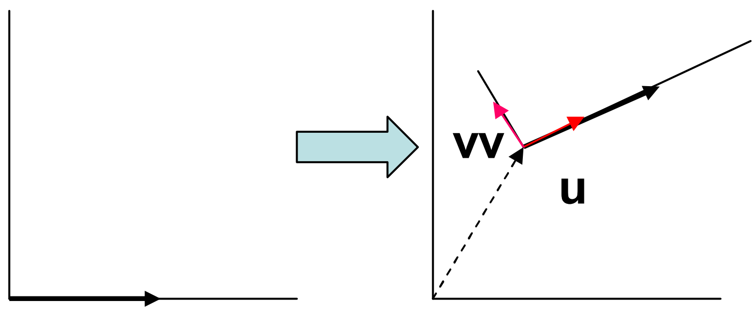
Transformaciones inversas

- Toda las matrices afines tienen inversas y su resultado geométrico es el movimiento contrario al ejecutado por la inversa.

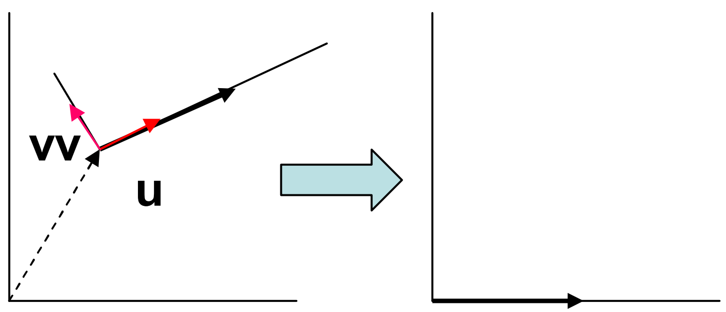
- $Inv(T(dx,dy)) = T(-dx, -dy)$
- $Inv(S(S_x, S_y)) = S(1/S_x, 1/S_y)$
- $Inv\ R(\theta) = R(-\theta) = R^T(\theta)$

Posicionamiento inverso

- Problema: Conocemos la posición inicial y final de un objeto, pero no conocemos la composición de matrices que lo ha llevado hasta allí.
- Nota: es un problema de sólido rígido (parecido a la cinemática inversa de robótica)



$$\begin{pmatrix} u_x & v_x & dx \\ u_y & v_y & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} u_x & u_y & dx \\ v_x & v_y & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

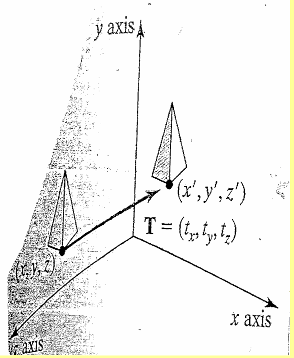
u y **v** deben ser vectores UNITARIOS

Transformaciones en 3D

Traslaciones

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}' = \mathbf{T} \cdot \mathbf{P}$$



Rotaciones

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}' = \mathbf{R}_z(\theta) \cdot \mathbf{P}$$

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Submatriz ortogonal

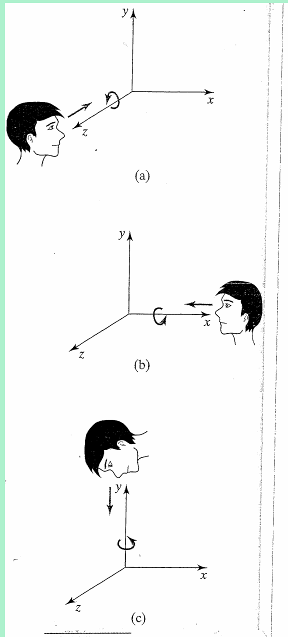


FIGURE 5-36 Positive rotations about a coordinate axis are counterclockwise, when looking along the positive half of the axis toward the origin.

Hearn, Baker

Escalados

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}' = \mathbf{S} \cdot \mathbf{P}$$

Posicionamiento inverso (3D)

Podemos hallar la matriz de orientación de un objeto conociendo la dirección de la nueva orientación y construyendo un sistema de coord. Asociado a dicho objeto

- Nota: es un problema de sólido rígido

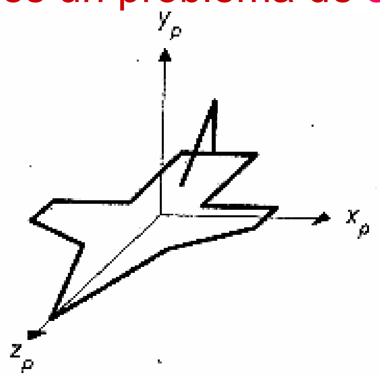


Fig. 5.21 An airplane in the (x_p, y_p, z_p) coordinate system.

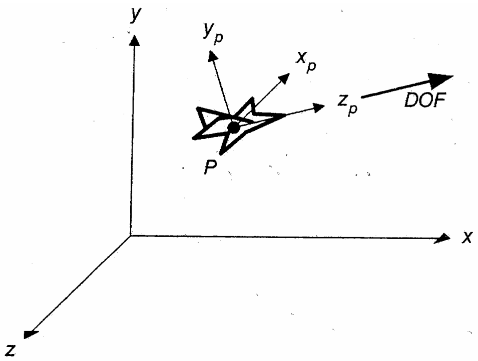


Fig. 5.22 The airplane of Figure 5.21 positioned at point *P*, and headed in direction *DOF*.

$\mathbf{z_p} = \mathbf{DOF} / |\mathrm{DOF}|$ $\mathbf{x_p} = \mathbf{y_p} \times \mathbf{z_p}$ (regla del tornillo) $\mathbf{y_p} = \mathbf{z_p} \times \mathbf{y_p}$

Cuidado: si $\mathbf{z_p}$ es paralelo a **y** entonces el producto vectorial será cero y la matriz será degenerada ya que hay infinitas soluciones al problema de encontrar un vector perpendicular

Posicionamiento inverso 3D (2)

- La matriz que lleva el avión original a la nueva **orientación** será

$$\mathbf{R(avion)} = \begin{pmatrix} \mathbf{x_p} & \mathbf{y_p} & \mathbf{z_p} & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EN COLUMNAS

- Y por tanto la matriz total que además lo sitúa en esa posición es

R(avion) T(p)

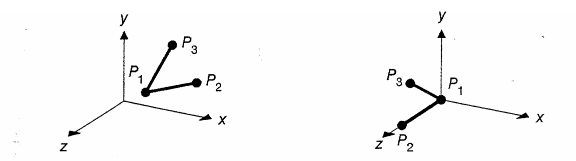
- **Ejemplo : DOF = (3, -2, 5)   p = (3,5,6)**

Ambos métodos

- Podemos enfrentar el mismo problema con los dos métodos.
- Nota: es un problema de sólido rígido

1. Trasladamos el punto p hasta el origen del sist. De coord. Del mundo
2. Rotación de π/2 - Θ sobre el eje **Y** para llevar el segmento P’2 P’1 al plano YZ
3. Rotación de Φ sobre el eje **X** para llevar P’’2 P’’1 sobre el eje z
4. Rotación de α sobre el eje **Z** para situar el segmento P’’’1P’’’3 en el plano YZ

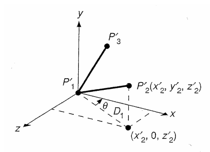
La solución del problema es adecuada si conocemos los ángulos.



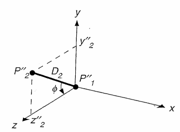
(a) Initial position (b) Final position

1^a Método

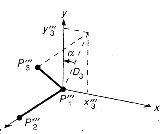
1. Translate P_1 to the origin
2. Rotate about the y axis such that P_1P_2 lies in the (y, z) plane
3. Rotate about the x axis such that P_1P_2 lies on the z axis
4. Rotate about the z axis such that P_1P_3 lies in the (y, z) plane.



1. $T(-P_x, -P_y)$
2. $R(90-\theta)$



3. $R(\phi)$



4. $R(\alpha)$

Ambos métodos (2)

- Segundo método

  Debemos pensar la matriz de rotación que construimos, compuesta de esta manera

$$R = \begin{bmatrix} r_{1_x} & r_{2_x} & r_{3_x} \\ r_{1_y} & r_{2_y} & r_{3_y} \\ r_{1_z} & r_{2_z} & r_{3_z} \end{bmatrix}.$$

Because R_z is the unit vector along P_1P_2 that will rotate into the positive z axis,

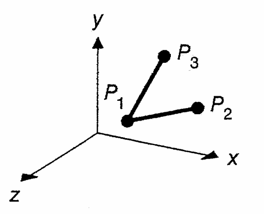
$$R_z = [r_{1_z} \quad r_{2_z} \quad r_{3_z}]^T = \frac{P_1P_2}{|P_1P_2|}.$$

In addition, the R_x unit vector is perpendicular to the plane of P_1, P_2, and P_3 and will rotate into the positive x axis, so that R_x must be the normalized cross-product of two vectors in the plane:

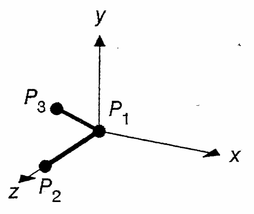
$$R_x = [r_{1_x} \quad r_{2_x} \quad r_{3_x}]^T = \frac{P_1P_3 \times P_1P_2}{|P_1P_3 \times P_1P_2|}.$$

Finally,

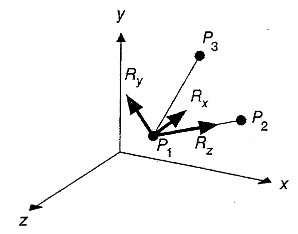
$$R_y = [r_{1_y} \quad r_{2_y} \quad r_{3_y}]^T = R_z \times R_x$$



(a) Initial position



(b) Final position



La composición de transformaciones total será

$$\begin{bmatrix} r_{1_x} & r_{2_x} & r_{3_x} & 0 \\ r_{1_y} & r_{2_y} & r_{3_y} & 0 \\ r_{1_z} & r_{2_z} & r_{3_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot T(-x_1, -y_1, -z_1) = R \cdot T,$$

Grafo de escena

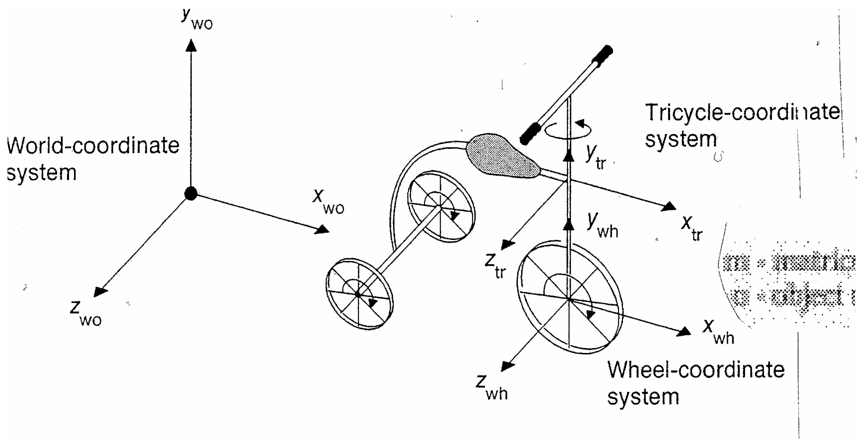


Fig. 5.26 A stylized tricycle with three coordinate systems.

Los ficheros geométricos sólo se cargan una vez, aunque se repitan las piezas

El programa de control recorre el grafo accediendo a cada nodo de transformación cada frame (1/25 seg.) y modifica su valor si la posición de la geometría por debajo de él ha variado