La MT com a model computacional

Es tracta d'estudiar els límits del que és computable basant-se en el model computacional de la MT.
Considerem la MT com un model de computació que es capaç de **computar** funcions definides sobre qualsevol domini

$$f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{R}$$

$$\langle x \rangle \; \boxed{M} \; \langle y \rangle$$

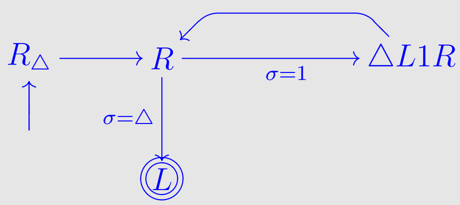
on $x \in \mathcal{D}$ i $y \in \mathcal{R}$.

$$f_M : \Gamma^\star \longrightarrow \Gamma^\star$$

és la funció de cadena associada a M.

MT com a MC: exemples

MT que suma dos enters:



Com que la potència d'una MT no depén de la codificació utilitzada, es farà servir en cada cas la més convenient. Codificarem normalment els enters en **unari**

Altres exemples: multiplicar, restar, dividir, passar de unari a qualsevol altra base i al revés, etc.

Tesi de Church-Turing

Diem que una funció és (intuïtivament) computable si existeix alguna forma metòdica i sistemàtica de calcular el valor d'aquesta funció per a tot valor del domini on està definida.
La idea de la MT captura d'alguna manera aquesta definició encara que, òbviament, no es pot donar cap demostració.

Se suposa com a certa l'anomenada tesi de Church-Turing:

Una funció és computable si i només si és Turing-computable

Una funció és Turing-computable si $\exists$ una MT que calcula els seus valors (i para quan la entrada no pertany al seu domini).

Funcions Computables. Problemes Resolubles.

Diem que un problema és **resoluble** si $\exists$ una funció computable que dóna la solució correcta per a tota **instància** del problema.

Si ens restringim a problemes de decisió (equivalents a llenguatges) estem en el cas de funcions de la forma

$$f : \Gamma^\star \longrightarrow \{0, 1\}$$

Aleshores es parla de problemes, funcions o llenguatges **decidibles**.

Exemple: Problema de l'anàlisi i funció característica d'un llenguatge.
Exemple: Donada G, és $L(G)$ buit?

Semi-decidibilitat

Es diu que un problema (de decisió) és **semi-decidible** si $\exists$ una MT que dóna la resposta correcta quan és afirmativa però que pot no parar quan és negativa.

$$x \longrightarrow \boxed{M} \longrightarrow \text{SI}$$

A nivell de llenguatges es té que

semi-decidible $\Rightarrow$ r.e.

Semi-decidibilitat

Exemple:

$$L_r = \{w_i | w_i \in L(M_i)\}$$

$$f(w) = \begin{cases} 1 & \text{si } w \in L_r \\ 0 & \text{si } w \notin L_r \end{cases}$$

La funció f és χ_{L_r}, la funció característica de L_r.

f i L_r són semi-decidibles.

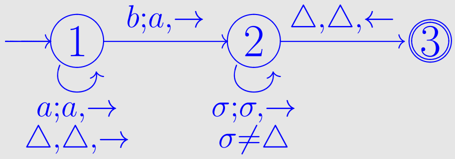
Indecidibilitat

És obvi que existeixen problemes irresolubles (indecidibles) com calcular la funció χ_{L_r} (o χ_{L_d}).

L'objectiu ara és donar un exemple de problema irresoluble no lligat (directament) a un llenguatge no recursiu.

El problema de la parada (P_P)

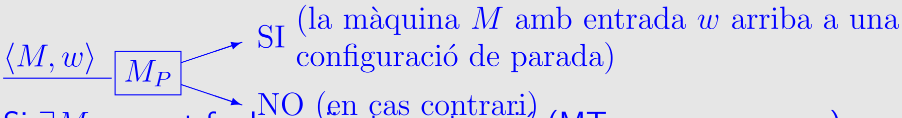
Donada una MT, M, i una cadena, w, ¿Pararà M amb w com a cadena d'entrada?



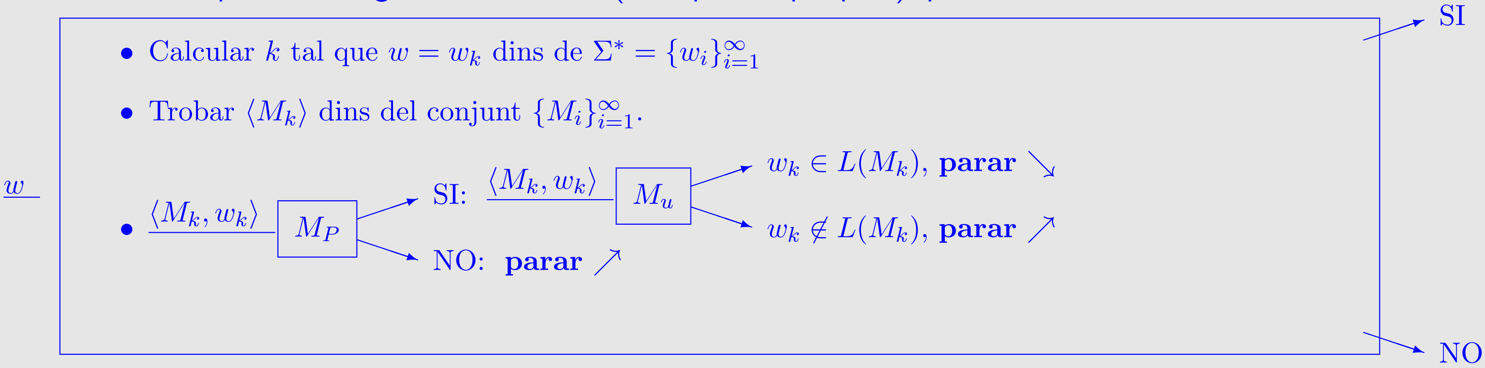
El P_P és indecidible

La demostració és per reducció a l'absurd i fa ús del fet que L_d és indecidible.

Suposem que el P_P és decidible, aleshores



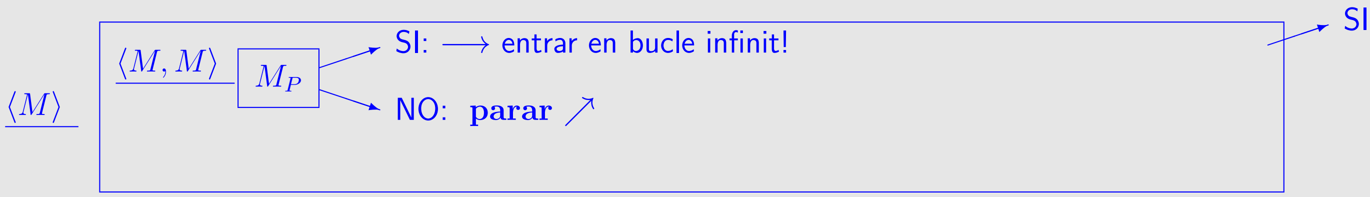
Si $\exists M_P$ es pot fer la següent construcció (MT que sempre para) que anomenarem M'.



Així definida, es té que $L(M') = L_d \Longrightarrow L_d \in \mathcal{L}_{rec}$! IMPOSSIBLE.

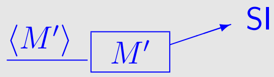
El P_P és indecidible fins i tot sense L_d!

Suposem que $\exists M_P$, i definim la construcció M'



M' serà potser absurda però està perfectament definida i funcionarà (parant o no) amb qualsevol entrada de la forma $\langle M \rangle$.

Per definició, M' PARA amb $\langle M \rangle \Leftrightarrow M$ NO PARA amb $\langle M \rangle$ $\boxed{\forall M!!}$. Aleshores si fem



tenim que passe el que passe entrem en contradicció!

Reducció entre problemes

Un problema P es **redueix** al problema Q si

- resoldre P es redueix (consisteix) a resoldre Q.
- la solució de Q implica la solució de P.
- Q resoluble $\Longrightarrow$ P resoluble.
- P irresoluble $\Longrightarrow$ Q irresoluble.

Ho escrivim com a $P \preceq Q$.

Si $P \preceq Q$ i $Q \preceq P$ aleshores es diu que P i Q són **equivalents** ($P \asymp Q$).

El Problema de la cinta en blanc

El problema de la cinta en blanc ($P_\triangle$)

Donada una MT, M, ¿Pararà M quan comence amb la cinta en blanc?

- $P_\triangle \preceq P_P$?

Si, perque si existira la MT M_P que resol P_P només caldria fer

$$\underline{\langle M, \varepsilon \rangle}\ \boxed{M_P} \begin{cases} \nearrow \text{SI} \\ \searrow \text{NO} \end{cases}$$

per saber si qualsevol M para o no amb la cinta en blanc.

- $P_P \preceq P_\triangle$? Ara no és tan senzill!

Si, si, però... $P_P \preceq P_\triangle$!?

Cal demostrar que la solució de $P_\triangle$ implica la de P_P.
O siga, suposant la existència de la MT $M_\triangle$ que resol el $P_\triangle$ s'ha de conseguir solucionar el P_P per a qualsevol entrada de la forma $\langle M, w \rangle$.

Siga la MT $M'_{\langle M,w \rangle}$

- Escriu w en una cinta.
- Simula la MT M amb entrada w.
- Si la simulació para, $\nearrow$ SI

Aquesta MT són en realitat moltes MT (tantes com possibles parelles (M, w)). Cada, $M'_{\langle M,w \rangle}$ està ben definida i per tant existeix la seua codificació.

El P_P es pot resoldre doncs $\forall M, w$ fent

$$\underline{\langle M'_{\langle M,w \rangle} \rangle}\ \boxed{M_\triangle} \begin{cases} \nearrow \text{SI: } M'_{\langle M,w \rangle} \text{ PARA} \Longrightarrow M \text{ PARA amb } w. \\ \searrow \text{NO: } M'_{\langle M,w \rangle} \text{ NO PARA} \Longrightarrow M \text{ NO PARA amb } w. \end{cases}$$

Aleshores, $P_P \preceq P_\triangle$ i, per tant $P_\triangle$ és $\boxed{\textbf{indecidible}}$ (per ser-ho P_P)

El Problema Universal

El problema universal (P_U)

$\boxed{\text{Donada una MT, } M\text{, i una cadena, } w\text{, ¿ } w \in M\text{?}}$

Llenguatge associat a P_U: $L_U = \{\langle M, w\rangle | w \in L(M)\}$

- És obvi que $P_U \preceq P_P$. (sabent que una MT para, es pot fer una simulació)
- $P_P \preceq P_U$?

es pot demostrar de dues formes ... EXERCICI

... el P_U és $\boxed{\textbf{indecidible}}$

En realitat P_U només és semi-decidible

¿Existeix una MT M_U que, donade qualssevol M i w conteste SI quan $w \in L(M)$? (quan $w \notin L(M)$ ens dóna igual el que faça la MT)

$\langle M, w\rangle \longrightarrow \boxed{M_U} \longrightarrow$ SI

Aquesta MT és (en aquest cas) exactament la MT universal que simula qualsevol M amb qualsevol cadena d'entrada.
Com que M_U existeix, P_U és $\boxed{\textbf{semi-decidible}}$.

O, el que és el mateix, L_U és r.e. i no recursiu.
També són semi-decidibles P_P i $P_\triangle$ (es poden fer raonaments similars).

El teorema de Rice

$\boxed{\text{Qualsevol propietat (no trivial) per als llenguatges r.e. és indecidible}}$

És a dir, no es pot construir una MT que, donat qualsevol L r.e., conteste si L compleix la propietat o no.

- Propietat: predicat associat a un llenguatge. Queda caracteritzada pel conjunt de llenguatges que la compleixen, $\mathcal{P} \subseteq 2^{\Sigma^\star}$.
- Una propietat $\mathcal{P}$ és **trivial** si $\mathcal{P} = \emptyset$ o si $\mathcal{P} = \mathcal{L}$ (família considerada).
- "donat L" significa que es té una descripció **finita** de L (normalment la codificació de la MT que l'accepta) que és l'entrada a una MT.

El teorema de Rice. Enunciat

Siga $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}_{re}$, $\mathcal{P} \neq \emptyset$ i $\mathcal{P} \neq \mathcal{L}_{re}$, aleshores $\mathcal{P}$és indecidible.

Demostració: Suposem que existeix $\xrightarrow{\langle M \rangle} \boxed{M_{\mathcal{P}}}$ $\begin{matrix} \nearrow L \in \mathcal{P} \\ \searrow L \notin \mathcal{P} \end{matrix}$

suposem que $\emptyset \notin \mathcal{P}$ (altrament considerem $\overline{\mathcal{P}}$) i siga $L_0 = L(M_0) \in \mathcal{P}$.

Considerem la MT $M'_{\langle M,w \rangle}$:

x

- Escriure $\langle M, w \rangle$ en la cinta d'entrada de M_u i fer la simulació

$\xrightarrow{\langle M,w \rangle} \boxed{M_u} \nearrow$

- Si s'arriba a una configuració d'acceptació:

$\xrightarrow{x} \boxed{M_0} \nearrow$ $SI \nearrow$

$\uparrow$ $\uparrow$

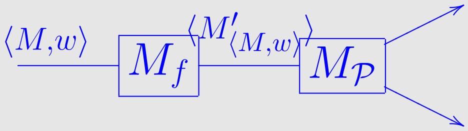
M w

El teorema de Rice. Enunciat

Segons aquesta descripció es compleix que

$$L(M'_{\langle M,w\rangle}) = \begin{cases} L_0 & \text{si } w \in L(M) \\ \\ \emptyset & \text{si } w \notin L(M) \end{cases}$$

Per tant, si anomenem M_f la MT que calcula $M'_{\langle M,w\rangle}$ a partir de $\langle M, w\rangle$ es té que



$$\begin{cases} L(M'_{\langle M,w\rangle}) \in \mathcal{P} \Rightarrow \\ L(M'_{\langle M,w\rangle}) = L_0 \Rightarrow w \in L(M) \end{cases}$$

$$\begin{cases} L(M'_{\langle M,w\rangle}) \notin \mathcal{P} \Rightarrow \\ L(M'_{\langle M,w\rangle}) = \emptyset \Rightarrow w \notin L(M) \end{cases}$$

El problema de la correspondència de Post

Anomenem **sistema de correspondència de Post** (SCP) dues seqüències de k cadenes de Σ^+.

$$A = \{u_1, \ldots, u_k\}, \;\; B = \{v_1, \ldots, v_k\}$$

Es diu que un SCP té solució si existeix una seqüència d'índexs, $i_1, \ldots, i_m$ ($m \geq 1$) tal que

$$u_{i_1} u_{i_2} \cdots u_{i_m} = v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_m}$$

Per exemple, el SCP format per $A = \{a, abaaa, ab\}$ i $B = \{aaa, ab, b\}$ té una solució que ve donada per la seqüència $(2, 1, 1, 3)$.

$$abaaa \cdot a \cdot a \cdot ab = u_2 u_1 u_1 u_3 = v_2 v_1 v_1 v_3 = ab \cdot aaa \cdot aaa \cdot b$$

El problema de la correspondència de Post

Un SCP gràficament,

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & & k \\ \begin{array}{|c|}\hline u_1 \\ \hline v_1 \\ \hline\end{array}, & \begin{array}{|c|}\hline u_2 \\ \hline v_2 \\ \hline\end{array}, & \ldots & \begin{array}{|c|}\hline u_k \\ \hline v_k \\ \hline\end{array} \end{array}$$

L'exemple anterior i la seua solució:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \begin{array}{|c|}\hline a \\ \hline aaa \\ \hline\end{array}, & \begin{array}{|c|}\hline abaaa \\ \hline ab \\ \hline\end{array}, & \begin{array}{|c|}\hline ab \\ \hline b \\ \hline\end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 1 & 3 \\ \hline \multicolumn{1}{|l|}{abaaa} & \multicolumn{1}{r|}{a} & \multicolumn{1}{c|}{a} & \multicolumn{1}{c|}{ab} \\ \hline \multicolumn{1}{|l|}{ab} & \multicolumn{1}{l|}{aaa} & \multicolumn{1}{c|}{aaa} & \multicolumn{1}{r|}{b} \\ \hline \end{array}$$

El problema de la correspondència de Post

Un altre exemple sense solució:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \begin{array}{|c|}\hline ab \\ \hline aba \\ \hline\end{array}, & \begin{array}{|c|}\hline baa \\ \hline aa \\ \hline\end{array}, & \begin{array}{|c|}\hline aba \\ \hline baa \\ \hline\end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 3 \\ \hline \multicolumn{1}{|l|}{ab} & \multicolumn{1}{l|}{aba} & \multicolumn{1}{l|}{aba} \\ \hline \multicolumn{1}{|l|}{ab\underline{a}} & \multicolumn{1}{r|}{ba\underline{a}} & \multicolumn{1}{r|}{ba\underline{a}} \\ \hline \end{array} \ldots$$

El problema de la correspondència de Post

Problema de la correspondència de Post (P_{CP})

Dades: Un SCP, $\{u_1, \dots u_k\}, \{v_1, \dots v_k\}$

Enunciat: Existeix una solució per al SCP de la forma

$$i_1, \dots i_m \quad (m \geq 1)?$$

El problema de la correspondència de Post

Problema de la correspondència de Post modificat (P_{CPM})

Dades: Un SCP, $\{u_1, \dots u_k\}, \{v_1, \dots v_k\}$

Enunciat: Existeix solució per al SCP de la forma

$$1, i_2, \dots i_m \quad (m \geq 1)?$$

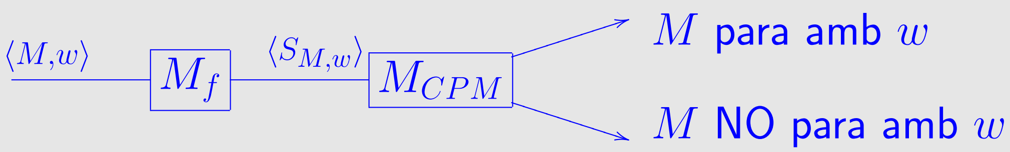
El P_{CP} és equivalent al P_{CPM}

$\boxed{P_{CP} \preceq P_{CPM}}$
més fàcil

$\boxed{P_{CPM} \preceq P_{CP}}$
???

El Problema de Post és indecidible

La demostració consisteix en fer $\boxed{P_P \preceq P_{CPM}}$
A partir de qualsevol MT M i qualsevol cadena w, construirem un SCP, $S_{M,w}$ de tal manera que



SCP corresponent a M i w

$$\overset{1}{\begin{array}{|c|}\hline \$ \\ \hline \$q_1w\$ \\ \hline\end{array}}, \overset{2}{\begin{array}{|c|}\hline \$ \\ \hline \$ \\ \hline\end{array}} \text{ i } \overset{\dots}{\begin{array}{|c|}\hline \sigma \\ \hline \sigma \\ \hline\end{array}} \ \forall\sigma \in \Gamma.$$

si $\delta(q,\sigma) = (p,\tau,\rightarrow)$, $\begin{array}{|c|}\hline q\sigma \\ \hline \tau p \\ \hline\end{array}$.

si $\delta(q,\sigma) = (p,\tau,\leftarrow)$, $\begin{array}{|c|}\hline \gamma q\sigma \\ \hline p\gamma\tau \\ \hline\end{array}$ $\forall\gamma \in \Gamma$.

si $\delta(q,\triangle) = (p,\tau,\rightarrow)$, $\begin{array}{|c|}\hline q\$ \\ \hline \tau p\$ \\ \hline\end{array}$.

si $\delta(q,\triangle) = (p,\tau,\leftarrow)$, $\begin{array}{|c|}\hline \gamma q\$ \\ \hline p\gamma\tau\$ \\ \hline\end{array}$ $\forall\gamma \in \Gamma$.

$$\begin{array}{|c|}\hline \sigma q\tau \\ \hline q \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \sigma q\$ \\ \hline q\$ \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \$q\tau \\ \hline \$q \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline q\$\$ \\ \hline \$ \\ \hline\end{array} \ \forall q \in F, \forall\sigma,\tau \in \Gamma.$$

Equivalència entre computacions i solucions del SCP

$$\begin{array}{|l|}\hline \$ \\ \hline \$q_1\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_k\$ \\ \hline\end{array} \begin{array}{|r|}\hline q_1\sigma_1 \\ \hline \underline{\tau q_2} \\ \hline\end{array} \begin{array}{|r|}\hline \sigma_2 \\ \hline \underline{\sigma_2} \\ \hline\end{array} \dots \begin{array}{|r|}\hline \sigma_k \\ \hline \underline{\sigma_k} \\ \hline\end{array} \begin{array}{|r|}\hline \$ \\ \hline \underline{\$} \\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|l|}\hline \$ \\ \hline \$q_1\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_k\$ \\ \hline\end{array} \begin{array}{||r||}\hline q_1\sigma_1\cdots\sigma_k\$ \\ \hline \tau q_2\sigma_2\cdots\sigma_k\$ \\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|l|}\hline \$ \\ \hline \$q_1w\$ \\ \hline\end{array} \begin{array}{||r||}\hline q_1w\$ \\ \hline \alpha_1 q_{i_1}\beta_1\$ \\ \hline\end{array} .. \begin{array}{||r||}\hline \alpha_{n-1}q_{i_{n-1}}\beta_{n-1}\$ \\ \hline \alpha_n q_{i_n}\beta_n\$ \\ \hline\end{array} .. \begin{array}{|r|r|}\hline ..\$ & q_{i_n}\$\$ \\ \hline q_{i_n}\$ & \$ \\ \hline\end{array}$$

Problemes sobre gramàtiques

Problema de la intersecció buida, P_{IB}

Dades:

Dues gramàtiques incontextuals, $G_A = \langle \Sigma, N_A, P_A, S_A \rangle$ i $G_B = \langle \Sigma, N_B, P_B, S_B \rangle$.

Enunciat: $L(G_A) \cap L(G_B) = \emptyset$?

Problemes sobre gramàtiques

$\boxed{P_{CP} \preceq P_{IB}}$

Siga $A = \{u_1, \ldots, u_k\}$ i $B = \{v_1, \ldots, v_k\}$ un SCP qualsevol sobre Σ. (que voldrem resoldre), i siga $\Delta = \{a_1, \ldots, a_k\}$, $\Sigma \cap \Delta = \emptyset$. Definim

$$G_A = \langle \{S_A\}, \Sigma \cup \Delta, S_A, \{S_A \to u_i S_A a_i | u_i a_i, \ i = 1, \ldots k\} \rangle$$

$$G_B = \langle \{S_B\}, \Sigma \cup \Delta, S_B, \{S_B \to v_i S_B a_i | v_i a_i, \ i = 1, \ldots k\} \rangle$$

$L(G_A)$ (o $L(G_B)$) està format per seqüències de "blocs" de A (o B) seguides per la mateixa seqüència invertida de símbols corresponents de Δ. Aleshores,

$$\begin{array}{c} \exists i_1, \ldots, i_n : \\ u_{i_1} \ldots u_{i_n} = v_{i_1} \ldots v_{i_n} \end{array} \iff \begin{array}{c} \exists x \in L(G_A) \cap L(G_B) \ \wedge \\ x = u_{i_1} \ldots u_{i_n} a_{i_1} \ldots a_{i_n} = v_{i_1} \ldots v_{i_n} a_{i_1} \ldots a_{i_n} \end{array}$$

Com que P_{CP} és indecidible, P_{IB} també!

Problemes sobre gramàtiques

Problema de la ambigüitat d'una gramàtica, P_{AG}

Dades: Una gramàtiqua incontextual, $G_A = \langle \Sigma, N_A, P_A, S_A \rangle$.

Enunciat: És G_A ambigua?

Problemes sobre gramàtiques

$\boxed{P_{CP} \preceq P_{AG}}$

Siga $A = \{u_1, \ldots, u_k\}$ i $B = \{v_1, \ldots, v_k\}$ un SCP qualsevol sobre Σ. (que voldrem resoldre), i siga $\Delta = \{a_1, \ldots, a_k\}$, $\Sigma \cap \Delta = \emptyset$. Definim $G = \langle \{S, S_A, S_B\}, \Sigma \cup \Delta, S, P \rangle$ on P és

- $S \to S_A | S_B$
- $S_A \to u_i S_A a_i | u_i a_i$, $i = 1, \ldots k$.
- $S_B \to v_i S_B a_i | v_i a_i$, $i = 1, \ldots k$.

Aleshores
$$\begin{array}{lll} S \Rightarrow S_A & \stackrel{\star}{\Rightarrow} & w_A = u_{i_1} u_{i_2} \cdots u_{i_n} a_{i_n} \cdots a_{i_1} \\ S \Rightarrow S_B & \stackrel{\star}{\Rightarrow} & w_B = v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_n} a_{i_n} \cdots a_{i_1} \end{array}$$

$$\boxed{G \text{ ambigua} \iff \exists w_A = w_B \iff (A, B) \text{ té solució.}}$$

El llenguatge de les computacions d'una MT

Donada $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \triangle, F \rangle$, una computació

$$q_0 w \vdash_M x_1 \vdash_M \cdots \vdash_M x_n$$

on $x_i \in \Gamma^\star Q \Gamma^\star$ i $w \in \Sigma^\star$ s'anomena **vàlida** si x_n és una configuració d'acceptació (i de parada).

Codifiquem les computacions com a cadenes sobre $\Gamma \cup Q \cup \{\$\}$:

$$q_0 w \$ x_1^{-1} \$ x_2 \$ x_3^{-1} \cdots \$ x_n \$$$

definim el llenguatge de les computacions vàlides de M com a:

$$L_M^v = \{\langle c \rangle \in (\Gamma \cup Q \cup \{\$\})^\star \mid c \text{ és vàlida}\}$$

El llenguatge de les computacions d'una MT

Teorema: L_M^v és co-incontextual

Demostrarem que $L_M^v = L_1 \cap L_2 \cap L_3 \cap L_4 \cap L_5$, on els $\overline{L_i}$ són incontextuals.

($\overline{L_M^v} = \overline{L_1} \cup \cdots \cup \overline{L_5}$, unió d'incontextuals)

$L_1 = (\Gamma^\star Q \Gamma^\star \$)^+$, regular, $\overline{L_1}$ regular $\Rightarrow$ incontextual

$L_2 = q_0 \Sigma^\star \$ \Delta^\star$, idem

$L_3 = \Delta^\star \Gamma^\star F \Gamma^\star \$$, idem

$L_4 = \{z = y_0 \$ y_1 \$ \cdots \$ y_k \mid y_{2\ell} \vdash_M y_{2\ell+1}^{-1},\quad \ell = 0, 1, \ldots \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor\}$

$L_5 = \{z = y_0 \$ y_1 \$ \cdots \$ y_k \mid y_{2\ell+1}^{-1} \vdash_M y_{2\ell+2},\quad \ell = 0, 1, \ldots, \lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor\}$

El llenguatge de les computacions d'una MT

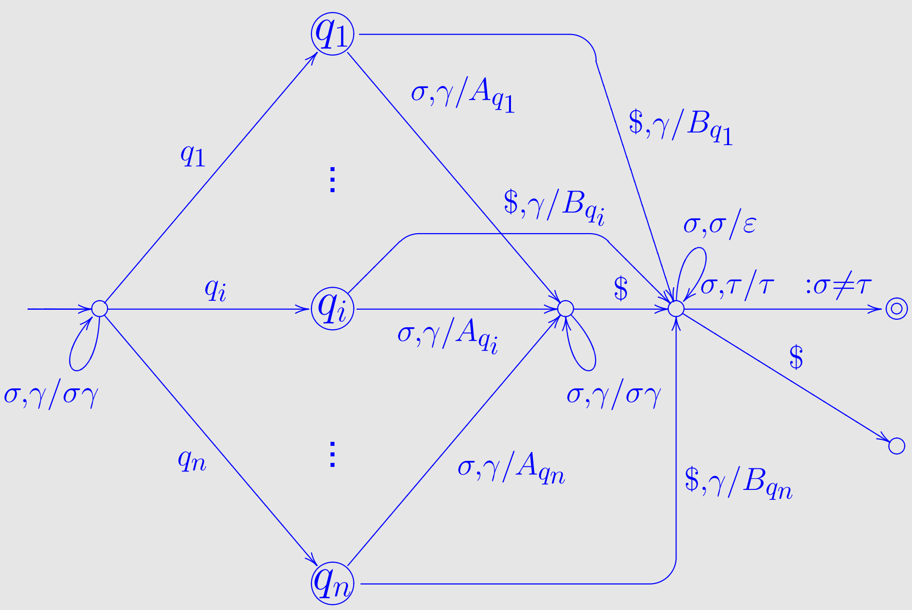
És incontextual $\overline{L_4}$?

Dues configuracions consecutives $y_{2\ell}$ i $y_{2\ell+1}$ han de complir:

$$\sigma_1 \cdots \sigma_{j-1}\, \underbrace{\overbrace{\sigma_j\, q\, \sigma_{j+1}}}\, \sigma_{j+2} \cdots \sigma_\ell \;\vdash_M \begin{cases} \sigma_1 \cdots \sigma_{j-1}\, \sigma_j\, \overbrace{\sigma' q'}\; \sigma_{j+2} \cdots \sigma_\ell \\ \qquad \underline{\texttt{si}}\ \delta(q, \sigma_{j+1}) = (q', \sigma', \rightarrow) \\ \\ \sigma_1 \cdots \sigma_{j-1}\, \underbrace{q' \sigma_j \sigma'}\; \sigma_{j+2} \cdots \sigma_\ell \\ \qquad \underline{\texttt{si}}\ \delta(q, \sigma_{j+1}) = (q', \sigma', \leftarrow) \end{cases}$$

El llenguatge de les computacions d'una MT

Autòmat amb pila indeterminista que accepta $\overline{L_4}$



El llenguatge de les computacions d'una MT

$$A_{q_i} = \begin{cases} q'\gamma\sigma' & \text{si } \delta(q_i, \sigma) = (q', \sigma', \leftarrow) \\ \\ \gamma\sigma' q' & \text{si } \delta(q_i, \sigma) = (q', \sigma', \rightarrow) \end{cases}$$

$$B_{q_i} = \begin{cases} q'\gamma\sigma' & \text{si } \delta(q_i, \triangle) = (q', \sigma', \leftarrow) \\ \\ \gamma\sigma' q' & \text{si } \delta(q_i, \triangle) = (q', \sigma', \rightarrow) \end{cases}$$

És incontextual L_M^v?

Sabem que és coincontextual. En principi, podria ser-ho o no.

Teorema: L_M^v incontextual $\iff$ $L(M)$ és finit

La demostració fa ús d'una generalització del lema del bombament per als incontextuals.
Es requereix, a més a més, que M efectue sempre almenys 3 moviments (no suposarà pèrdua de generalitat).

En resum L_M^v no és incontextual (llevat del cas trivial)!

Més problemes: És $\overline{L(G)}$ incontextual?

P_{CI}: És incontextual el complementari d'un incontextual?

$$\langle G \rangle \longrightarrow \boxed{M_{CI}} \begin{cases} \overline{L(G)} \text{ incontextual} \\ \overline{L(G)} \text{ no incontextual} \end{cases}$$

Donada M construim G' tal que $\overline{L_M^v} = L(G')$ i aleshores

$$\langle G' \rangle \longrightarrow \boxed{M_{CI}} \begin{cases} L_M^v \text{ incontextual} \implies L_M^v \text{ finit} \implies L(M) \text{ finit} \\ L_M^v \text{ no incontextual} \implies L(M) \text{ infinit} \end{cases}$$

$$\boxed{L(M) \text{ finit és indecidible (T. Rice)} \implies P_{CI} \text{ indecidible}}$$

Més problemes: És G trivial?

Problema de la gramàtica genera-tot, P_{GT}

Dades: Una gramàtica incontextual, $G = \langle \Sigma, N, P, S \rangle$.

Enunciat: $L(G) = \Sigma^\star$?

$$\langle M \rangle \longrightarrow \boxed{M_f} \xrightarrow{\langle G' \rangle} \boxed{M_{GT}} \begin{cases} \overline{L_M^v} = \Sigma^\star \implies L(M) = \emptyset \\ \overline{L_M^v} \neq \Sigma^\star \implies L(M) \neq \emptyset \end{cases}$$

Donada una MT M es podria calcular la G' que genera les computacions **no** vàlides. M_{GT} ens diria aleshores si n'hi ha alguna vàlida o no, la qual cosa és equivalent a saber si $L(M)$ és buit.

Com que $L(M) = \emptyset$ és indecidible pel teorema de Rice, també ho serà P_{GT}.

Més problemes: Són iguals dos llenguatges incontextuals?

$P_=$: $L(G_1) = L(G_2)$?

Si fóra resoluble, existiria la MT:

$$\langle G_1, G_2 \rangle \longrightarrow \boxed{M_=} \begin{cases} \to L(G_1) = L(G_2) \\ \to L(G_1) \neq L(G_2) \end{cases}$$

Si $G_T = \langle V_T, V_N, \{S \to aS|\varepsilon \ : \ a \in V_T\}, S\rangle$, aleshores $L(G_T) = {V_T}^\star$.

Donada qualsevol altra G podriem fer:

$$\langle G, G_T \rangle \longrightarrow \boxed{M_=} \begin{cases} \to L(G) = {V_T}^\star \\ \to L(G) \neq {V_T}^\star \end{cases}$$

Per tant, $P_{GT} \preceq P_=$.

$\boxed{P_= \text{ és indecidible per ser-ho } P_{GT}.}$