Problemes de Teoria d'Autòmats i Llenguatges Formals I

Francesc J. Ferri i Salvador Bayarri

Dept. d'Informàtica i Electrònica

Universitat de València, 22 d'octubre de 1997

Llenguatges Formals i Gramàtiques

1. És regular el llenguatge $L = \{10^n1 \in \Sigma^* : n \leq 10000\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$?

2. Siga $L_1 = \{a, bc, ba\}$ i $L_2 = \{\varepsilon, bcc, a\}$. Calcular els llenguatges $L_1 \cdot L_2$, $L_2 \cdot L_1$, $L_1 \cdot L_2 \cup L_2 \cdot L_1$, $L_1 \cdot L_2 \cap L_2 \cdot L_1$, ${L_1}^2$, L_1/L_2, i L_2/L_1.

(*)3. Trobar una gramàtica (com més senzilla millor) que genere cadenes de zeros i uns que no tinga dos símbols 1 consecutius. De quin tipus és el llenguatge generat?

4. Trobar gramàtiques que generen els llenguatges
$L_1 = \{a^n b^n | n \geq 0\}$ i $L_2 = \{a^n | n \geq 1\} \cup \{b^n | n \geq 1\}$.

(*)5. Escriure una gramàtica que genere les cadenes de dígits, $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, corresponents a nombres enters. Per exemple, 0, 1, 22, 2304 són correctes però 0023 no.

(**)6. Escriure una gramàtica que genere les cadenes de dígits corresponents a nombres decimals. Per exemple, 0, 12.3, 0.15, 0.0000032.

(*)7. Trobar una gramàtica que genere cadenes en $\{0, 1\}^*$ de forma que cada zero vaja necessàriament seguit per un 1.

(**)8. Trobar una gramàtica que genere cadenes en $\{0, 1\}^*$ en la qual hi hagen el doble de zeros que de uns.

9. Eliminar les regles nul·les en la següent gramàtica:
$S \to AB$ $\quad A \to SA|BB|bB$ $\quad B \to b|aA|\varepsilon$

10. Calcular el llenguatge generat per la següent gramàtica i trobar una gramàtica equivalent el més senzilla possible. De quin tipus és el llenguatge?
$S \to AB$ $\quad A \to Ab|a$ $\quad B \to cB|d$

(*)11. Demostrar que el llenguatge $L_3 = \{a^n b^n c^n | n \geq 1\}$ és generat per la gramàtica
$S \to abc|aXbc$ $\quad Xb \to bX$ $\quad bY \to Yb$
$Xc \to Ybcc$ $\quad aY \to aaX|aa$

(*)12. Trobar gramàtiques independents del context que generen els següents llenguatges:

(a) $L = \{a^i b^j | i \geq 0, j \geq 0, j \geq i\}$
(b) $L = \{a^i b^j a^j b^i | i \geq 0, j \geq 0\}$
(c) $L = \{a^i b^i a^j b^j | i > 0, j > 0\}$
(d) $L = \{a^i b^i | i \geq 0\} \cup \{b^i a^i | i \geq 0\}$
(e) $L = \{ww^{-1} | w \in \{a, b\}^*\}$
(f) $L = \{a^i b^j c^{i+j} | i \geq 0, j \geq 0\}$

13. Dir (i demostrar) quin és el llenguatge generat per la gramàtica $S \to ab|ba|SS|aSb|bSa$

14. Dir quin és el llenguatge generat per la gramàtica
$A \to aABC|abC|\varepsilon$ $\quad CB \to BC$ $\quad bB \to bb$
$bC \to b$

15. Dir (i demostrar) quin és el llenguatge generat per la gramàtica
$S \to aAB$ $\quad bB \to a$ $\quad Ab \to SBb$
$Aa \to SaB$ $\quad B \to SA|ab$

(**)16. Demostrar que el llenguatge $L = \{a^{n^2} | n > 0\}$ és generat per la gramàtica
$S \to a|CD$ $\quad C \to ACB|AB$ $\quad AB \to aBA$
$Aa \to aA$ $\quad Ba \to aB$ $\quad AD \to Da$
$BD \to Ea$ $\quad BE \to Ea$ $\quad E \to a$
Suggerència: considerar les formes sentencials $A^n B^n D$ i $a^{n^2} B^n A^n D$.

Autòmats Finits i Llenguatges Regulars

(*)17. Trobar un autòmat finit determinista simplificat que accepte totes les cadenes de zeros i uns en les quals tot símbol 0 tinga un símbol 1 a continuació.

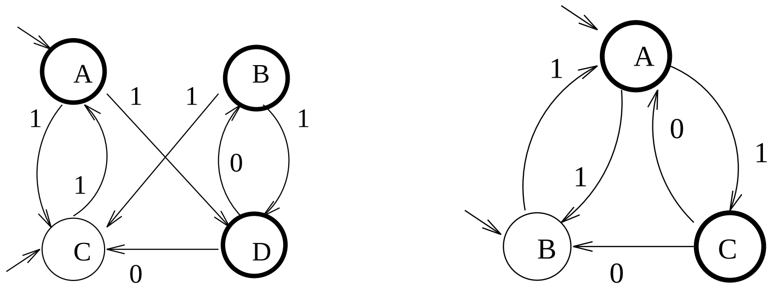
(*)18. Trobar un autòmat finit determinista simplificat que accepte totes les cadenes de $\{0,1\}^*$ que continguen la subcadena 010 o la subcadena 101.

(**)19. Trobar un autòmat finit determinista el més simplificat possible que accepte totes les cadenes de $\{0,1\}^*$ que acaben amb 101 o 011.

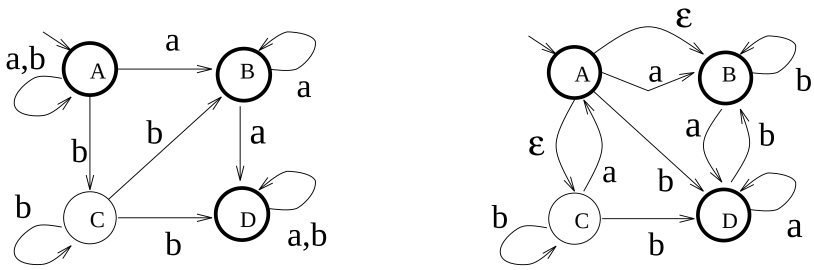
(**)20. (a) Com es podria generalitzar el concepte d'autòmat finit perque puguera tindre més d'un estat inicial?

(b) Siga $A = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$, on I és el conjunt d'estats inicials. Quin seria el llenguatge acceptat per l'autòmat A?

(c) Són equivalents els següents autòmats?



(*)21. Trobar autòmats finits deterministes equivalents als següents autòmats:



(*)22. Donar un mètode general que, a partir d'un autòmat, A, obtinga un altre autòmat, A', de forma que $L(A) = L(A')^{-1}$. És a dir, A' accepta el mateix llenguatge que A però invertit. Aplicar el mètode als autòmats de la pregunta anterior.

(*)23. Trobar gramàtiques regulars per la dreta equivalents als autòmats de les preguntes anteriors.

(*)24. Trobar un autòmat finit determinista (AFD) equivalent a la gramàtica donada per les següents produccions:
$S \to 01A|B|\varepsilon$ $\quad A \to 0A|1C$ $\quad B \to 10B|\varepsilon$
$C \to 1C|0B$

(**)25. Trobar un autòmat finit determinista que accepte les cadenes generades per la gramàtica següent: $S \to bA|aC|aS$ $\quad A \to b|aB$ $\quad B \to bS|b|cC$

Expressions i Conjunts Regulars

(*)26. Construir AFDs equivalents a les següents expressions regulars:

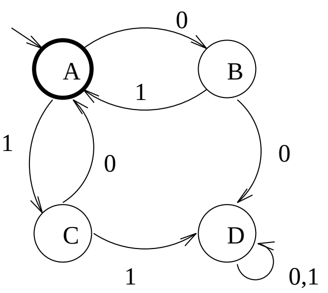
(a) $10 + (0 + 11)0^*1$

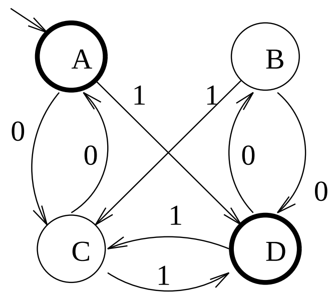
(b) $01\,[((10)^* + 111)^* + 0]^*\,1$

(c) $(1 + 01 + 001)^*(\varepsilon + 0 + 00)$

(d) $(10^+ + (00)^*)(1 + \varepsilon)$

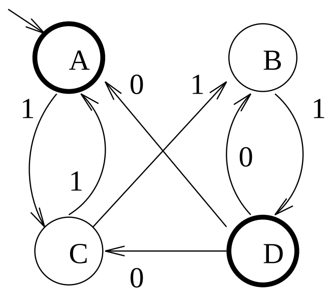
(*)27. Calcular les expressions regulars corresponents als següents autòmats:

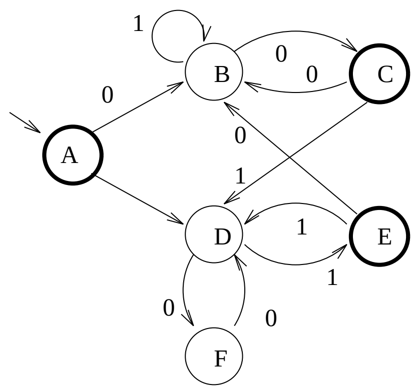




28. Simplificar la següent expressió regular: $\varepsilon + 1^*(001)^*(1^*(011)^*)^*$

(**)29. Trobar les expressions regulars corresponents als següents autòmats:





(**)30. Trobar les expressions regulars corresponents als llenguatges *complementaris* acceptats pels autòmats de l'exercici anterior.

(**)31. Calcular una expressió regular equivalent al llenguatge format per cadenes w de $\{a, b\}^*$ tals que $|w|_a$ és parell i $|w|_b$ és imparell.

(**)32. Trobar una expressió regular per al llenguatge format per qualsevol cadena de $\{a, b\}^*$ de longitud parella.

PROPIETATS DELS LLENGUATGES REGULARS I MINIMITZACIÓ D'AUTÒMATS

(*)33. Demostrar la no regularitat de $L = \{0^n 1^n, \quad n \geq 0\}$ mijantçant el lema del bombeig.

(*)34. Siga L_e el llenguatge format per les cadenes de $\{0,1\}^*$ amb el mateix nombre de zeros i uns. És regular L_e? Si ho és trobeu l'autòmat equivalent i si no, demostreu-ho.

(**)35. Calcula les classes d'equivalència que indueix sobre Σ^* la congruència associada al llenguatge L definit per l'expressió regular $a^*b^*a^*$.

(**)36. Siga $h : \{a,b\} \Longrightarrow \{0,1\}^*$ un homomorfisme donat per $h(a) = 01, \quad h(b) = 0$.

(a) Calcular $h^{-1}((10+1)^*)$ y donar el AFD mínim que l'accepte.

(b) Calcular $h((a+b)^*)$ y donar el AFD mínim que l'accepte.

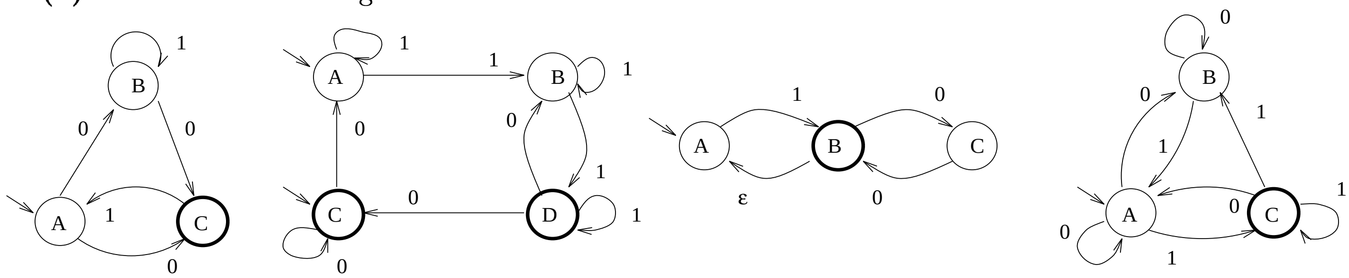
(c) Calcular $h^{-1}(L_e)$ on L_e conté totes les cadenes amb el mateix nombre de 0 i 1.

(**)37. Donada la gramàtica G: $S \to aS|bA \qquad A \to cS|aB|\varepsilon$
$B \to aA|bC \qquad C \to aS|cB|bC|\varepsilon$

i l'homomorfisme $h : \{0,1,2,3\} \longrightarrow \{a,b,c\}^*$ definit com:
$h(0) = aa \qquad h(1) = abc \qquad h(2) = aab \qquad h(3) = bba$

obtenir una gramàtica lineal per l'esquerra, G', tal que $L(G') = h^{-1}(L(G))$ i donar també el autòmat mínim associat.

(*)38. Minimitzar els següents autòmats:



(**)39. Trobar l'autòmat mínim i l'expressió regular corresponent que representen totes les cadenes de zeros i uns que tinguen un nombre imparell de zeros.

(**)40. Considera el llenguatge L_1 format per totes aquelles cadenes de $\{0,1^*\}$ tals que la seua longitud és imparella i no poden contindre més de dos símbols 1 seguits. Siga L_2 el llenguatge que conté cadenes de longitut parella formades només per símbols 0 o només per símbols 1. (a) Donar l'autòmat determinista mínim que accepte el llenguatge $L_1 \cup L_2$. (b) Calcular una expressió regular equivalent a $\overline{L_1}$

41. La classe dels llenguatges regulars és tancada respecte de la unió **infinita**?
Inspira't en el llenguatge $\{a^i b^i, \quad i = 0,1,...\}$.

(**)42. Dir quin dels següents llenguatges sobre $\{0,1\}^*$ és regular. Justifiqueu les respostes.

(a) El conjunt de cadenes que tinguen k zeros i $k+1$ uns per a qualsevol k.

(b) El conjunt de cadenes on cada zero és precedit per exactament k uns i seguit també per exactament k uns, on k és un valor constant especificat.

(c) El mateix d'abans però sent k qualsevol valor (el mateix per a una mateixa cadena).

(d) El conjunt de cadenes que tinguen més uns que zeros.

Gramàtiques Incontextuals i Autòmats a Pila

(*)43. Donar una gramàtica independent del context que genere cap-i-cues en $\{0,1\}^*$.

(*)44. Passar la següent gramàtica a forma normal de Greibach.

$S \to AA|0$
$A \to SS|1$

(**)45. Passar la següent gramática a forma normal de Greibach.

$S \to SS|A$
$A \to 0A1|S|01$

(**)46. Donar una gramàtica independent del context que genere el llenguatge

$$L = \{a^i b^j | i = j \vee j = 2i\}$$

.

(*)47. Construir un autòmat a pila determinista que accepte $L = \{0^n 1^m | m \geq n\}$. Donar també una gramàtica equivalent.

(*)48. Simplificar i donar un autòmat a pila equivalent a la següent gramàtica:

$S \to AB|CA$
$A \to a$
$B \to BC|AB$
$C \to aB|b$

(**)49. Donar un autòmat a pila que reconega el llenguatge format per parèntesis equilibrats

Exemple: $((()())()) \in L$, $((()) \notin L$, $)))(((\notin L$

(**)50. A partir de l'autòmat a pila que genera el llenguatge $L = \{ww^{-1} | w \in \{0,1\}^*\}$, donar la gramàtica independent del context equivalent. Donar la gramàtica equivalent en forma normal de Greibach.

(**)51. Trobar un autòmat a pila equivalent a la gramàtica:

$S \to aSc$
$S \to abAbc$
$A \to \varepsilon$

PROPIETATS DELS LLENGUATGES INCONTEXTUALS

(**)52. Siguen I_1, I_2 dos llenguatges independents del context i R_1, R_2 dos llenguatges regulars sobre un alfabet Σ. Digues quina és la classe més restrictiva a què pertanyen les següents combinacions de llenguatges i *per què*.

(a) $R_1/\overline{I_1}$

(b) $(I_1 \cap \overline{R_1})/R_2$

(c) $(\overline{I_1} \cap R_1)/R_2$

(d) $\bigcup_{i=1}^{\infty}(I_1 \cap R_1^i)$

(e) $(I_1 \cup I_2)/R_1$

(f) $(R_1 \cup R_2)/(I_1 \cap I_2)$

(g) $(R_1 \cap I_2)/(R_1 \cap R_2)$

(h) $\bigcup_{i=1}^{\infty} R_1^i$

(i) $\bigcap_{i=1}^{\infty}(I_1 \cup R_1^i)$

(j) $I_1 \cap R_1 \cap R_2$

(k) $I_1 \cap I_2 \cap R_1$

(l) $\Sigma^* - (\overline{L_1} \cup R_1)$

(**)53. Siga $L_1 = \{0^n 1^n | n \geq 0\}$, $L_2 = \{ww^{-1} | w \in (0+1)^+\}$.
Siga $h : \{0,1\} \longrightarrow \{a,b\}^*$ definit com a $h(0) = aba$, $h(1) = b$.
Siga $g : \{a,b\} \longrightarrow \{0,1\}^*$ definit com a $g(a) = 01$, $g(b) = 11$.

Calcular els següents llenguatges i dir quin és el tipus més restrictiu al que pertanyen.

(a) $L_1 \cap L_2 =$

(b) $L_1 \cap g(a^*) =$

(c) $h(L_1) \cap h(L_2) =$

(d) $L_2 \cap 0^*10^*$

(e) $L_2 \cap 0^*1^*0^*$

(f) $h^{-1}((a+b)^*bb) =$

(g) $L_1/L_2 =$

(h) $L_2/L_1 =$

(i) $L_2/0^*$

(j) $L_2/1^*$

(*)54. Aplicar el lema del bombeig per demostrar (si es pot) que els següents llenguatges no són independents del context:

$L_1 = \{a^i b^i c^j | j \geq i\}$

$L_2 = \{a^i b^j c^k | i \leq j \leq k\}$

$L_3 = \{a^i b^j c^i d^j | i \geq 1 j \geq 1\}$

$L_4 = \{a^i b^j c^k | 2i = j + k\}$

(*)55. Repetir l'exercici anterior aplicant propietats de clausura.

(**)56. Aplicar el lema del bombeig al següent llenguatge i extraure les conclusions pertinents.

$L = \{a^i b^j c^k d^\ell | i = 0 \wedge j = k = \ell\}$

(**)57. Justificar si el llenguatge $L = \{0^{i^2}, i \geq 0\}$ és o no independent del context.

(**)58. És independent del context el llenguatge $L = \{ww | w \in \{0,1\}^*\}$?