

PROPIEDADES DE LAS NOTACIONES ASINTÓTICAS

Relaciones de orden

La notación asintótica nos permite definir relaciones de orden entre el conjunto de las funciones sobre los enteros positivos:

- $f \in O(g(n)) \leftrightarrow f \leq g$ (se dice que f es asintóticamente menor o igual que g)
- $f \in o(g(n)) \leftrightarrow f < g$
- $f \in \Theta(g(n)) \leftrightarrow f = g$
- $f \in \Omega(g(n)) \leftrightarrow f \geq g$
- $f \in \omega(g(n)) \leftrightarrow f > g$

Relaciones entre cotas

1. $f(n) \in O(f(n))$
2. $f(n) \in O(g(n)) \wedge g(n) \in O(h(n)) \Rightarrow f(n) \in O(h(n))$
3. $f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow g(n) \in \Omega(f(n))$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)/g(n) = 0 \Rightarrow O(f(n)) \subset O(g(n))$
5. $O(f(n)) = O(g(n)) \Leftrightarrow f(n) \in O(g(n)) \wedge g(n) \in O(f(n))$
6. $O(f(n)) \subset O(g(n)) \Leftrightarrow f(n) \in O(g(n)) \wedge g(n) \notin O(f(n))$
7. $\Omega(f(n)) \subset \Omega(g(n)) \Leftrightarrow f(n) \in \Omega(g(n)) \wedge g(n) \notin \Omega(f(n))$

Relaciones de inclusión

Son muy útiles a la hora de comparar funciones de coste en el caso asintótico.

$\forall x, y, a, \varepsilon \in \mathbb{R}^{>0}$

1. $\log_a n \in O(\log_b n)$
2. $O(\log_a^x n) \subset O(\log_a^{x+\varepsilon} n)$
3. $O(\log_a^x n) \subset O(n)$
4. $O(n^x) \subset O(n^{x+\varepsilon})$
5. $O(n^x \log_a^y n) \subset O(n^{x+\varepsilon})$
6. $O(n^x) \subset O(2^n)$

Propiedades de clausura

El conjunto de funciones del orden de $f(n)$ es cerrado respecto de la suma y la multiplicación de funciones:

1. $f_1(n) \in O(g_1(n)) \wedge f_2(n) \in O(g_2(n)) \Rightarrow f_1(n) + f_2(n) \in O(g_1(n) + g_2(n))$
2. $f_1(n) \in O(g_1(n)) \wedge f_2(n) \in O(g_2(n)) \Rightarrow f_1(n) \cdot f_2(n) \in O(g_1(n) \cdot g_2(n))$
3. $f_1(n) \in O(g_1(n)) \wedge f_2(n) \in O(g_2(n)) \Rightarrow f_1(n) + f_2(n) \in O(\max(g_1(n), g_2(n)))$

como consecuencia es que los polinomios de grado k en n son exactamente del orden de n^k

$$a_k n^k + \dots + a_1 n + a_0 \in \Theta(n^k)$$