CONCEPTOS MATEMATICOS

1. CONCEPTOS MATEMÁTICOS

1.1 LOGARITMOS

Logaritmo en base a de x: $\log_a x = b$

Logaritmo decimal, cuando la base es 10: $\log x$

Logaritmo neperiano, cuando la base es e (e=2.71828): $\ln x$

Propiedades:

- $\log_a 1 = 0;$
- $\log_a a^x = x;$
- $\log_a x^y = y \log_a x$
- $\log_a x\, y = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a x/y = \log_a x - \log_a y$
- $\log_b x = \log_a x / \log_a b$ (cambio de base)
- $y^{\log_a x} = x^{\log_a y}$

1.2 FUNCION SUELO Y TECHO

Se define la función **suelo** como el entero más próximo por defecto a un número real x:

$$\lfloor x \rfloor = \max \{n \in Z : n \leq x\}$$

Se define la función **techo** como el entero más próximo por exceso a un numero real x:

$$\lceil x \rceil = \min \{n \in Z : n \geq x\}$$

Propiedades:

- Para todo $x \in R$ se cumple:
  - $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$
  - $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$
  - $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$

- $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$
- $\lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil$

- Para todo $x \in R$ y $n \in N$ se cumple:
  - $x < n \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor < n$
  - $n < x \Leftrightarrow n < \lceil x \rceil$
  - $x \leq n \Leftrightarrow \lceil x \rceil \leq n$
  - $x \geq n \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor \geq n$
- Para todo $x,y \in R$ se cumple:
  - $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$
  - $\lceil x \rceil + \lceil y \rceil -1 \leq \lceil x + y \rceil \leq \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$
- Para todo $n,m \in Z$ se cumple:
  - $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n+m-1}{m} \right\rfloor$
  - $\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n-m+1}{m} \right\rceil$

Teorema 1: Sea $f : R \rightarrow R$, una función continua y monótona creciente con la propiedad que $f(x) \in Z \Rightarrow x \in Z$. Entonces se cumple:

- $\lfloor f(x) \rfloor = \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor$
- $\lceil f(x) \rceil = \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$

Demostración

Si $x \in Z$, entonces $x = \lfloor x \rfloor$ y el teórema es cierto.
Si $x \notin Z$, entonces $x > \lfloor x \rfloor$ y como f es una función creciente se tiene que $f(x) \geq f(\lfloor x \rfloor)$, lo que implica directamente que:

$$\lfloor f(x) \rfloor \geq \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor$$

como $x \notin Z$, entonces $\exists$ y tal que $f(y) = \lfloor f(x) \rfloor$ y $x \geq y > \lfloor x \rfloor$. La propiedad de f implica que $y \in Z$, lo que contradice el hecho de que pueda existir un entero entre x y $\lfloor x \rfloor$, por lo tanto

$$\lfloor f(x) \rfloor = \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor$$

1.3 SUMAS Y SUCESIONES

Se define una **sucesión** a una funció $f : Z^{+} \rightarrow R$. El valor f(n) se denomina término n-ésimo y se representa como a_n

Se define una **sucesión aritmética** de razón r, a una sucesión tal que para todo $i > 1$ se cumple que $a_i = a_{i-1} + r$.

Se define una **sucesión geométrica** de razón r a una sucesión tal que para todo i > 1 se cumple que $a_i = a_{i-1} * r$.

Teorema 2: Si $\{a_i\}$ es una progresión aritmética, la suma de los n primeros números es:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$$

Demostración

Podemos escribir la suma como:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} (a_1 + (i-1)\cdot r)$$

si hacemos el cambio i = n - j + 1

$$S_n = \sum_{i=n}^{1} (a_1 + (n-j)\cdot r)$$

y sumamos y restamos la cantidad a_1 + r dentro del sumatorio

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} (a_1 + a_1 - a_1 + (n-1)\cdot r + (-j+1)\cdot r)$$

como tenemos que $a_n = a_1 + (n-1)\,r$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} (a_1 - a_1 + a_n + (-j+1)\cdot r) = \sum_{i=1}^{n} (a_1 + a_n - a_1 - (j-1)\cdot r)$$

$$S_n = n\cdot(a_1 + a_n) - \sum_{i=1}^{n} (a_1 + (j-1)\cdot r) = n\cdot(a_1 + a_n) - S_n$$

y por lo tanto

$$S_n = \frac{n}{2}\cdot(a_1 + a_n)$$

Teorema 3: Si $\{a_i\}$ es una progresión geométrica de razón r con r ≠ 1, la suma de los n primeros términos es:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}}$$

Demostración

Podemos escribir la suma como:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_1 \cdot r^{i-1}$$

si multiplicamos por r y aplicamos el cambio i=j-1 tenemos

$$r\cdot S_n = \sum_{i=1}^{n} a_1 \cdot r^{i} = \sum_{j=2}^{n+1} a_1 \cdot r^{j-1} =$$

y sumamos y restamos a_1 y sacamos el último término fuera del sumatorio tenemos

$$r\cdot S_n = -a_1 + \sum_{j=1}^{n+1} a_1 \cdot r^{j-1} = -a_1 + \sum_{j=1}^{n} a_1 \cdot r^{j-1} + a_1 \cdot r^n$$

si sustituimos por la expresión de S_n tenemos:

$$r\cdot S_n = a_1 \cdot r^n - a_1 + S_n = a_1 \cdot (r^n - 1) + S_n$$

$$(r-1)\cdot S_n = a_1 \cdot (r^n - 1)$$

y por lo tanto

$$S_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Teorema 4: Para todo $r \neq 1$ se cumple que:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} ir^{i-1} = \frac{(r-1)\cdot nr^{n} - r^{n} + 1}{(r-1)^{2}}}$$

Demostración:

Partiendo de la expresión de la suma de una progresión geométrica (iniciando la progresión en i=0):

$$\sum_{i=0}^{n} r^{i} = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$$

y derivando respecto de r y operando tenemos:

$$\sum_{i=0}^{n} i\cdot r^{i-i} = \frac{(n+1)\cdot r^{n}\cdot(r-1)-(r^{n+1}-1)}{(r-1)^{2}}$$

si desarrollamos y eliminamos el primer termino del sumatorio obtenemos el resultado deseado:

$$\sum_{i=1}^{n} i\cdot r^{i-i} = \frac{n\cdot r^{n+1} - nr^{n} + \cancel{r^{n+1}} - r^{n} - \cancel{r^{n+1}} + 1}{(r-1)^{2}}$$

Corolario: Si r = 2 tenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} i\cdot 2^{i-1} = n2^{n} - 2^{n} + 1$$

Teorema 5: Para todo $r \neq 1$ se cumple que:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} ir^{-i} = \frac{1}{(r-1)^{2}}\cdot\left(r - \frac{n(r-1)}{r^{n}} - \frac{r}{r^{n}}\right)}$$

Demostración:

Si hacemos el cambio i = n - j + 1 en el sumatorio tenemos

$$\sum_{i=1}^{n} i\cdot r^{-i} = \sum_{j=n}^{1}(n-j+1)\cdot r^{-n+j-1} = \sum_{j=1}^{n}(n+1)\frac{r^{j-1}}{r^{n}} - \sum_{j=1}^{n} j\frac{r^{j-1}}{r^{n}} = \frac{n+1}{r^{n}}\sum_{j=1}^{n} r^{j-1} - \frac{1}{r^{n}}\sum_{j=1}^{n} j\cdot r^{j-1}$$

el primer sumatorio corresponde a una progresión geometrica hasta n+1 y el segundo por la expresión del teoréma 4, con lo que:

$$\sum_{i=1}^{n} i\cdot r^{-i} = \frac{n+1}{r^{n}}\cdot\frac{r^{n+1}-1}{r-1} - \frac{(r-1)\cdot nr^{n} - r^{n} + 1}{(r-1)^{2}}$$

realizando operaciones obtenemos el valor buscado.

Corolario: Si r = 2 tenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} i\cdot 2^{-i} = 2 - \frac{n}{2^{n}} - \frac{2}{2^{n}}$$