EJERCICIOS TEMA 4 (Principio de inducción)

1. Demostrar por inducción que $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2. Demostrar por inducción que $\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$

3. Demostrar por inducción que $\sum_{i=1}^{n} i^k \le \frac{n^k(n+1)}{2}$

4. Demostrar por inducción que $\binom{n}{m} \le n^m$

5. Sea T una función de N en N tal que:

T(0) = 0
T(n) = T(n-1) + d * n si n > 0

Donde d es una constante fija. Demostrar por inducción que T(n) ≤ d * n^2.

6. Sea T una función de N en N tal que:

T(0) = 0
T(1) = 1
T(n) = 2*T(n-1) – T(n – 2) si n > 0

Demostrar por inducción que T(n) = n.

7. Escribir las ecuaciones que definen la operación de concatenación de colas, análoga a la de listas. Demostrar el siguiente teorema inductivo: si *c* es una cola cualquiera y *c1* es una cola no nula,

c ++ c1 ≡ pide_turno(primero(c1), c) ++ avance(c1)

8. Dada la operación *alterna* sobre pilas:

alterna: pila → pila
∀ p: pila, ∀ x, y: elem

1) alterna(p_nula) ≡ p_nula
2) alterna(apilar(x, p_nula)) ≡ apilar(x, p_nula)
3) alterna(apilar(x, apilar(y, p))) ≡ apilar(y, apilar(x, alterna (p)))

a) Averiguar cual es el efecto de aplicar la operación alterna sobre la pila [1,2,3]. ¿Qué es lo que hace esta operación?

b) Demostrar por inducción que:
alterna(alterna(p)) ≡ p

9. Las ecuaciones de la operación concatenar de una pila son:

concatenar: pila, pila $\rightarrow$ pila

$\forall$ p1, p2: pila, $\forall$ x: elem

1) concatenar(p_nula, p2) $\equiv$ p2
2) concatenar(apilar(x, p1), p2) $\equiv$ apilar(x, concatenar(p1, p2))

Demostrar por inducción que la operación concatenar es asociativa, es decir:

$\forall$ a, b, c: pila

concatenar(a, concatenar(b, c)) $\equiv$ concatenar(concatenar (a, b), c)

10. Las ecuaciones de la operación pre son:

pre: arbol $\rightarrow$ pila

$\forall$ p, p1, p2: pila, $\forall$ x: elem, $\forall$ a1, a2: arbol

1) pre(a_nulo) $\equiv$ p_nula
2) pre(plantar(x, a1, a2)) $\equiv$ apilar(x, concatenar(pre(a1), pre(a2)))

Conocemos además la siguiente ecuación sobre concatenar:

3) altura(concatenar(p1, p2)) $\equiv$ altura(p1) + altura(p2)

Utilizando las ecuaciones de los tipos pila y arbol y las ecuaciones anteriores demostrar el siguiente *teorema inductivo*:

$\forall$ a: arbol

tam(a) $\equiv$ altura(pre(a))